Digitized by Google

Digitized by Google

Anton Lorgner.

<36628389610014

<36628389610014

E

Bayer. Staatsbibliothek

Digitized by Google

Mathesis. Opera varia mathesin illustr. 83.

Digitized by Google

Beyträge
zum Gebrauche
der
Mathematik
und
deren Anwendung

durch

J. H. Lambert.

Mit Kupfern.

Zweyter Theil
Erſter Abſchnitt.

Berlin,
im Verlag der Buchhandlung der Realſchule,
1770.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Digitized by Google

Vorrede.

Ich liefere hier wiederum einige Abhandlungen, die theils die Erweiterung, theils die Anwendung der Mathematik zur Abſicht haben. Es ſind deren zwölfe von ſo verſchiedenem Inhalte, daß jede beſonders angezeigt werden müſte, wenn man von allen zuſammen genommen einen Begrif geben wollte. Ich kann aber dieſes hier unterlaſſen, und diejenigen, die ſo geſchwinde weg ein Buch überſehen wollen, auf das am Ende dieſer Vorrede ſtehende Verzeichniß verweiſen. Andern, die ſich etwas mehr umſe-

Digitized by Google

hen wollen, muß ich ſagen, daß ſie von jeder Abhandlung wenigſtens den Anfang leſen, wo ſie mehrentheils angezeigt finden werden, wohin es bey jeder abgeſehen iſt. Vielleicht nehmen ſie ſich dann die Gedult, weiter fort zu leſen, und beym Fortleſen finden ſie etwan auch Dinge, die, wenn ſie ſchon nicht anfangs angekündigt waren, dennoch von einiger Brauchbarkeit und Erheblichkeit ſeyn werden.

Dieſes iſt nun, was ich überhaupt zu ſagen hatte. Es bleiben aber noch Anmerkungen über einzelne Stellen zurücke, die hier ihren Ort finden mögen. Einmal habe ich dieſe Abhandlungen nicht ununterbrochen, ſondern ſeit 1765 nach und nach geſchrieben. Und dieſes muß, um Anachroniſmen zu vermeiden, erinnert werden. So z. E. iſt die hier vorkommende fünfte Abhandlung: für die Erforſcher der Quadratur des Circuls, im Jahr 1766 vor derjenigen geſchrieben worden, die ich einige Monathe nachher bey der hieſigen Königl. Akademie der Wiſſenſchaften über eben die Materie vorgeleſen.

Sie

Sie können aber beyde ganz wohl beyſammen beſtehen. In der zweyten Abhandlung: Theiler der Zahlen in Tabellen wird man ſehen, daß ich erſt nachgehends näher müſſe erfahren haben, was es mit Pells Tafel von den Theilern der Zahlen für eine Bewandtniß habe. Man wird daher nicht übel thun, wenn man dieſe 2te Abhandlung mit dem vergleicht, was ich in den ganz neu herausgekommenen Zuſätzen zu den logarithmiſchen und trigonometriſchen Tabellen über die Sache anmerke. Die hier gelieferte Tafel der Theiler der Zahlen erſtreckt ſich zwar nur bis auf 10200, ſie giebt aber bey jeder Zahl die ſämtlichen Factoren an, hingegen geht die Pellſche Tafel zehnmal weiter, es wird aber darin bey jeder Zahl nur ihr kleinſter Theiler angegeben. Wer demnach die Pellſche Tafel vollſtändig machen wolte, würde immer noch etwas zu thun finden, wiewohl ich im §. 15. darauf eben noch nicht die rechte Unſterblichkeit des Namnes ſetze.

In Anſehung der vierten Abhandlung, welche algebraiſche Ausdrücke der

Sinus von 3 zu 3 Graden liefert, muß ich hier anmerken, daß bereits Wallis ſich die Mühe gegeben, ähnliche Formeln für die Chorden zu berechnen. Sie werden aber wegen der veralteten Zeichnungsart, dafern man ſich nicht daran gewöhnt, ziemlich unleslich.

Bey der zweyten Abhandlung verdient Huygens, daß ich wenigſtens hier erwähne, daß er von den in einem fortgehenden Brüchen (fractio continua) zuerſt Gebrauch gemacht hat, als er für die Umlaufszeit der Planeten, geſchmeidige Verhältniſſe in ganzen Zahlen ſuchte.

Was ich im Anfange der achten Abhandlung von Auflöſung der Cubic- und Biquadrat-Gleichungen ſage, wird ſich nützlich mit den Formeln vergleichen laſſen, die in vorerwähnten Tabellen vorkommen. Ueber die Verwandlung der Gleichungen hat, wo ich mich recht erinnere, Waring, ein Engländer, einen den meinigen ganz ähnlichen Verſuch gemacht, er nimmt aber die Sache ſo ſehr abſtracte vor, daß er die Vortheile, ſo beſondere und einfa-

chere

Digitized by Google

chere Fälle anbieten, gar nicht ſehen konnte.

Wer die eilfte Abhandlung über die Grundſätze des Gleichgewichtes und der Bewegung zum Lernen lieſet, der wird hin und wieder einige Aufmerkſamkeit gebrauchen müſſen; denen aber muß ich Bedacht anrathen, die dieſe Abhandlung, um ſie zu beurtheilen, leſen wollen. Was im eigentlichſten Verſtande a priori ſeyn ſoll, kann nur Möglichkeiten enthalten. Man muß aber dieſe Möglichkeiten am allgemeinſten nehmen, ſie vollſtändig vorzählen, und dann erſt ſehen, welche davon in der wirklichen Welt vorkommen, und unter welchen Bedingungen ſie vorkommen. Was einer Möglichkeit den ſo verachteten Namen einer Hypotheſe giebt, iſt nicht, daß es eine Möglichkeit iſt, ſondern das unbewieſene Vorausſetzen, daß dieſe Möglichkeit exiſtire. Betrachtungen von dieſer Art machten, daß ich den Begrif der Kraft anfangs ſehr abſtract genommen, und nicht ſogleich den Begrif der Schwere damit verbunden habe. Der abſtracte Begrif iſt aber ge-

rade derjenige, den wir uns gedenken, wenn wir uns eine Kraft überhaupt vorſtellen, oder auch, wenn wir auf unſere eigene Empfindung merken. Der ſiebente Abſchnitt der Abhandlung wird über den Vortrag und die Anordnung der vorhergehende Abſchnitte ein ziemliches Licht ausbreiten. Man muß aber, um dabey recht zu ſehen, dieſe vorhergehende Abſchnitte vorerſt geleſen haben. Noch bleibt hier anzumercken, daß die im ſiebenten Abſchnitte angeführte Erfahrungen mit einer Allgemeinheit und mit einem Anſchein von äuſſerſt genauer Richtigkeit vorgetragen ſind, für welche ich gar nicht gut ſtehe. Man nimmt ſie zwar gewöhnlich ſo an, und bey dem Gebrauche der Mechanik im gemeinen Leben kann man es auch dabey bewenden laſſen. Wer aber auf Theorie ſieht, der kann ſowohl die durchgängige Allgemeinheit als die bis auf Infiniteſimaltheilchen richtige Genauigkeit in Zweifel ziehen. Vielleicht wird die noch immer ſo ſchwere und noch immer ſo unbekannte Theorie der Schwere und des dabey vorkommenden Mechanismus

nismus dabey gewinnen. In der That ſuchte auch Newton ſich durch beſondere Verſuche zu überzeugen, ob das, was man in der Dynamic Maſſe nennt, dem, was man in der Static Gewicht nennt, ſo durchgängig proportional ſey? Die Verſuche, ſo wie er ſie anſtellte, wiederlegten den Satz nicht. Vielmehr zeigten ſie eine Proportionalität. Sie zeigten aber dieſe nicht genauer als Newton beobachten konte. Und ſo läßt ſich, wenn es auf ſehr kleine Unterſchiede ankommen ſollte, noch anſtehen, ob die Proportionalität bis aufs unendlich Kleine ſtatt habe. Die meiſten Körper verliehren im Feuer von ihrer Maſſe, einige aber werden im Feuer ſchwerer. Wie, wenn ſie bey wenigerer Maſſe dennoch mehr Gewicht erhielten? Es mag nun aber mit bemeldten Erfahrungen beſchaffen ſeyn, wie es wolle, ſo richten ſich die im ſiebenten Abſchnitte daraus gezogenen Schlüſſe genau nach denſelben, und welchem Schluſſen etwas abgebrochen werden muß, daß wird der Erfahrung abgebrochen, die dabey zum Grunde liegt. Auch dieſes aber zeigt,

warum der ſiebente Abſchnitt nicht der erſte, oder überhaupt warum er erſt der ſiebente iſt.

Es iſt billig, daß ich hier nebſt Herrn Pr. Tetens, der ganz neulich über das Principium minimi eine ſchöne Abhandlung bekannt gemacht hat, die Herren Pr. Käſtner und Karſten, als ſolche Gelehrten nenne, die ſich wegen Berichtigung der Beweiſe auch in der Mechanik hervorgethan haben. Ihre Bemühungen ſind weder unerheblich noch überflüßig. Das meiſte in der Mechanik war immer noch blos deswegen wahr, weil es die Erfahrung lehrte, und in der Hydroſtatik gieng es mit den Beweiſen nicht beſſer. Ungeachtet ich nun hier in dem Vortrage der ſtatiſchen Sätze einen andern Weg genommen, ſo finde ich dennoch den von dieſen beyden Gelehrten gegebenen Beweis vom Gleichgewichte bey dem Hebel, ſo weit er reicht, ganz gut. Was ſie beyde ſelbſt noch dabey vermiſſen werden, iſt daß der Beweis von jeden Verhältniſſen aus dem Beweiſe von Verhältniſſen in ganzen Zahlen hergeleitet werden muß, und

eben

Digitized by Google

eben daher viel von der Kürze, Geſchmeidigkeit und von dem Einfachen verleurt, welches man bey den erſten Grundſätzen oder unmittelbar aus den Gründen abzuleitenden Lehrſätzen verlangen kann. Ich hatte mich, wiewohl ohne ſonderlichen Erfolg, umgeſehen, wiefern die Sache abgekürzt werden kan. Ich gab aber die Sache noch wegen einer andern Betrachtung auf, und dieſe iſt folgende:

Man ſetze, daß es ſich leicht und ſtrenge erweiſen laſſe, daß bey dem Hebel Kraft zur Laſt in umgekehrter Verhältniß des Abſtandes ſey, ſo ſehr auch Kraft und Laſt unter ſich incommenſurabel ſeyn mögen. Wenn auch ein ſolcher Beweis angeht, ſo hat man damit noch nicht viel anders gewonnen, als daß man das Geſetz bewieſen hat, nach welchem Kräfte auf einzelne Puncte des Hebels wirken. Es würde aber immer ein Sprung und zwar ein Sprung von einer auf zwo Dimenſionen ſeyn, wenn man von Kräften, die auf einzelne Puncte wirken, auf Kräfte verfallen wollte, die auf ganze Linien wirken. So hete-

heterogen indeſſen dieſe Kräfte ſind, ſo iſt es deſſen unerachtet gedenkbar, daß eine auf einen Punct angebrachte Kraft, einer auf eine ganze Linie wirkenden Kraft das Gleichgewicht halte. Die Kräfte ſind hier eben ſo wie Puncte und Linien, der Dimenſion nach, verſchieden, weil ſonſt von keinem Gleichgewichte, und überhaupt von keiner Vergleichung die Rede ſeyn könnte. Die hieher gehörende Begriffe und Grundſätze müſſen nun nothwendig vorausgeſchicket werden; und dieſes machte auch, daß ich die Dimenſionen der Kraft im dritten Abſchnitte, die Theorie des Hebels aber erſt im vierten vortrug, und ſo war es ein leichtes, dieſe Theorie behörig ins reine zu ſetzen. Alles kömmt auf den §. 31 an. Die daſelbſt gebrauchte Vorausſetzung iſt, daß eine auf eine ganze Linie gleichförmig vertheilte Kraft eben ſo wie die Linie in beliebige Theile getheilt werden könne, und die Theile der Kraft eben ſo wie die Theile der Linien ihr Verhältniß zum Ganzen behalten. Dieſen Satz mag man als

einen

einen Grundſatz oder als ein *Poſtulatum* anſehen; es gilt mir gleichviel. Mir ſcheint er in dem Begrif der Kraft ſo am Tage zu liegen, daß ich nicht mehr wiſſen würde, was eine Kraft iſt, wenn er erſt ſollte bewieſen oder in Zweifel gezogen werden. Und wenn ich auch die Theorie des Hebels nicht darauf gründen wollte, ſo bleibt er deſſen unerachtet, eben ſo unentbehrlich, weil man in der Mechanik immer auch ſolche Kräfte betrachten muß, die auf ganze Linien, Flächen und körperliche Räume vertheilt ſind. Muß man ihn aber als einen Grundſatz annehmen, um andere Hauptſtücke der Mechanik darauf zu gründen, ſo gründe ich mit gleichem Rechte die Theorie des Hebels darauf, und erſpahre dadurch ſo wohl das Aufſuchen anderer oder gar nicht zu findender Grundſätze, als ängſtlich geſuchte Beweiſe, die zuletzt dennoch nur für einzelne Puncte des Hebels dienen.

Der nach dem dreyzehnten Abſchnitte eingerückte Zuſatz ſollte eigentlich nach dem vierzehnten folgen, wie man es gleich aus den erſten fünf Zeilen ſehen kann.

Es hat übrigens dieſes Verſetzen nichts auf ſich, wiewol es wäre geändert worden, wenn ich die Aushängebogen nicht erſt nach dem Abdrucke erhalten hätte. Aus gleichem Grunde muß auch S. 72

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095$$

geleſen werden. S. 114 iſt in den drey letzten Ueberreſten im Rechnen um eine Unität gefehlt, um welche die achte Decimalſtelle zu klein iſt; und S. 154 unten muß

Nun iſt

$$3 \log.(b:a) = 0,6820631 - 17$$
$$l. \tfrac{2}{81} \; - \; - \; - = 0,3925450 - 2$$
$$\tfrac{1}{3} \log. a \; - \; - = 0,7598949 - 1$$

demnach

$$\log. \frac{2b^3}{81a^3} . \sqrt[3]{a} = 0,8345030 - 19$$

geleſen werden. In den Kupferplatten ſind folgende Aenderungen zu machen:

Tab. III. Fig. 2. wird bey dem Durchſchnittspunct der Bögen EM, GC ein A geſetzt.

Tab. III. Fig. 5 muß oben zwiſchen Z, W ein N ſtehen.

Tab. V. Fig. 14. wird am untern Ecke ein D geſetzt.

Tab. VI. Fig. 18. wird von g nach q eine blinde Linie gezogen.

Die

Die übrigen Errata, die von einiger Erheblichkeit ſind, finden ſich am Ende der Vorrede; und die ſo ich beym nochmaligen Collationiren in den Mondstafeln und den Beyſpielen bemerkt, am Ende derſelben. In der Tafel von den Theilern der Zahlen müſſen

bey	1117	die Theiler	11. 101
• •	1603	• • • •	7. 229
• •	2737	• • • •	7. 17. 23
• •	4249	• • • •	7. 607
• •	8981	• • • •	7. 1283

geſetzt werden.

Einige Fehler im Texte rühren noch daher, daß der Setzer, vielleicht der Märkiſchen Mundart gemäß, die Fallendungen verwechſelt, und z. E.

S. 172. l. 4. um ſich der anſtatt um ſich die
S. 391. l. penult. denſelben anſtatt demſelben.
S. 512. l. 5. von unten, den Körper anſtatt dem Körper ꝛc.

geſetzt hat.

Wer die Mondstafeln gebrauchen will, thut wohl, wenn er die bemerkten Errata derſelben ausbeſſert. Ich glaube, daß ſie ſodann ziemlich zuverläßig ſeyn werden. Indeſſen da man bey

Digitized by Google

bey dem Gebrauche ſelbſt auch ſich uͤberrechnen kann, ſo iſt das Rathſamſte, jede Rechnung doppelt zu machen; bey der einen die Tage vom Anfang, bey der andern die Tage vom Ende des Jahrs zu gebrauchen. Dabey gebraucht man ſodann auch in der zweyten Tafel zween verſchiedene Jahrgaͤnge, und da man doch einerley heraus bringen muß, ſo wird die Vergleichung immer zur Porbe dienen, und dadurch werden die mittlern Bewegungen auſſer Zweiffel geſetzt, oder man kann wenigſtens den Fehler nachſpuͤhren. Andere Mittel werden ſich, wenn man ſich einmal an die Tafeln gewoͤhnt hat, leicht anbieten. Selbſt in der Abhandlung kommen einige bey den Beyſpielen vor.

Da dieſer zweyte Theil der Beytraͤge doppelt ſtaͤrker geworden als der erſte, ſo habe ich zwey Titelblaͤtter abdrucken laſſen, wovon das Zweyte vor die eilfte Abhandlung gebunden werden muß. Der Buchbinder wird daran dergeſtalt erinnert, daß er ſich nach der Willkuͤhr des Beſitzers zu erkundigen hat, ob dieſer zween oder nur einen Band haben will.

ERRATA.

Digitized by Google

Errata.

Seite	anſtatt	lieſe:
2. linie 6	Theile	Theiler
5. l. 15	z. E.	So z. E.
5. unten	Ueberreſt der	Ueberreſt. Die
6. l. 18	$a - x$ mal	$a + x$ mal
29. l. 21	fürgegeben iſt	fürgegeben, iſt
30. l. 16	in einer	inner
70. l. 10	in Rechnung	Rechnung
78. §. 20. l. 1	$2 = 1$	$z = 1$
79. §. 21. l. 2	$l(1+2) = 2 \ldots$ ꝛc.	$l(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \&c.$
80. l. 1	$2 = 2$	$z = 2$
88. l. 3 von unten	$a^{2n+2} + b^{2n+2}$	$a^{2n+2} - b^{2n+2}$
97. §. 32. l. 11	657153 ꝛc.	67153 ꝛc.
118. §. 47. l. 3	$\frac{1}{7} + x^7$	$\frac{1}{7} x^7$
120. l. 3	$\frac{1}{9} \quad \frac{1}{11}$	$\frac{1}{9} - \frac{1}{11}$
144. l. 4	Rakensburg	Ravensburg
192. §. 9. l. 6	$A x$	$A x^2$
213. l. 3	y^2	z
215. l. 23	$z^6 + \ldots$	$x^6 + \ldots$
254. l. 3	$m \nu C$	$\mu \nu C$
254. l. 5	$\alpha \mu \alpha$	$a \mu \alpha$
262. §. 15. l. 1	NH, MK	MH, NK
324. §. 13. l. 3	e	k
324. §. 13. am Ende	$d = NL$	$\delta = NL$
329. l. 18	Gleichgewichte	Gewichte

Inhalt.

I. Theilung und Theiler der Zahlen S. 1

II. Vorſchlag die Theiler der Zahlen in Tabellen zu bringen = = = = 42
Nebſt einer ſolchen Tabelle von 1 bis 10200 = = = = = = 53

III. Verwandlung der Brüche = = 54

IV. Algebraiſche Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden = = = 133

V. Vorläufige Kenntniſſe für die, ſo die Quadratur und Rectification des Circuls ſuchen = = = 140

VI. Einige Anmerkungen von Ausmeſſung der Winkel und Linien auf dem Papier = = = = 170

VII.

Inhalt.

VII. Anlage zur Tetragonometrie . 175

VIII. Anmerkungen über die Verwandlung und Auflöſung der Gleichungen 184

IX. Quadratur und Rectification der krummen Linien durch geradelinichte Vielecke, welche um dieſelbe und in denſelben beſchrieben werden können 250

X. Anmerkungen und Zuſätze zur Gnomonic 314

1°. Anmerkungen über die Azimuthal-Uhren 315

2°. Beſtimmung des Azimuth durch die Höhe der Sonne . . . 322

3°. Sector, um aus der Sonnenhöhe die Zeit zu beſtimmen . . 337

4°. Methode dieſe Sectoren für jede Polhöhe univerſal zu machen . . . 341

5°. Conſtructionen für die Sonnenhöhe 347

6°. Anmerkungen über die Horizontal- und Verticaluhren 350

7°. Beſchreibung eines halben Circuls, um aus der Höhe der Sonne die Zeit zu finden 358

8°. Beſchreibung eines gleichſchenklichten Triangels, um aus der Sonnenhöhe die Stunden zu finden . . . 360

Digitized by Google

Inhalt.

XI. Gedanken über die Grundlehren des Gleichgewichtes und der Bewegung 363
Erſte Grundlehren der Static.
1°. Der Begrif der Kraft . . 370
2°. Die unbiegſame Linie 377
3°. Die Dimenſionen der Kraft . . 383
4°. Der Hebel 392
5°. Der Druck der Kräfte auf ebene Flächen 421
6°. Der Druck der Kräfte auf körperliche Räume 430
7°. Einige ſtatiſche Definitionen und Sätze 440
8°. Die Zuſammenſetzung der Kräfte 444
Erſte Gründe der Dynamic.
9°. Das Entſtehen der Bewegung 477
10°. Die Beſtimmung der Geſchwindigkeit 498
11°. Anwendung der Dynamic auf die Schwere 509
12°. Anwendung der Dynamic auf die Federkraft 516
13°. Der Stoß elaſtiſcher Körper 523
Zuſatz von dem Principe de la moindre Action 543
14°. Das Carteſiſche und Leibnitziſche Kräftenmaaß 556
Erſte Grundlehren der Hydroſtatic.
15°. Beſchaffenheit flüßiger Materien 575

16°.

Digitized by Google

Inhalt.

16°. Das Gleichgewicht flüßiger Materien 587
17°. Die Bewegung flüßiger Materien 608

XII. Zergliederung und Anwendung der Mayerſchen Mondstafeln.

1°. Vorläufige Betrachtungen . . 629
2°. Die mittlere Bewegung . . 639
3°. Ungleichheiten des Mondlaufes 660
4°. Beſtimmung der Ungleichheiten des Mondlaufes durch die mittlere Bewegungen 668
5°. Betrachtung des Falls, wenn der Mond keine andere Ungleichheiten hätte, als die er zur Zeit der wahren Syzigien hat 672
6°. Die ſtündliche Bewegung des Mondes 681
7°. Die Keplerſche Beſtimmung des Mondlaufes 688
8°. Beſtimmung der Zeit zwiſchen den wahren und mittlern Syzigien 694
9°. Tafeln zur Berechnung der Syzigien und Finſterniſſe 702
10°. Berechnung und Entwerfung der Mondsfinſterniſſe 706
11°. Berechnung und Entwerfung der Sonnen- und Erdfinſterniſſe . . 720
12°. Allgemeine Entwerfung der Erdfinſterniſſe 727
13°. Die Genauigkeit der Projectionen 738

14°

Digitized by Google

Inhalt.

14°. Die Zeit der gröſten Verfinſterung . 751

15°. Die Zuverläßigkeit bey den Finſterniſſen 755

16°. Tafeln für den Mondlauf auſſer den Syzigien 764

17°. Bewegung des wahren Orts der Sonne und des Mondes auſſer den Syzigien 767

18°. Tafeln für die Bedeckung der Fixſterne von dem Monde, Berechnung und Entwerfung derſelben . . 780

Tafeln und Beyſpiele . . . 817

I.
Theilung und Theiler der Zahlen.

§. 1.

Es iſt nicht zu zweifeln, daß die Aufgabe von Erfindung der Theiler der Zahlen von den älteſten Zeiten an die Geometer beſchäftigt habe. Die Theorie der Primzahlen kömmt bereits in den Euclidiſchen Anfangsgründen vor, und eben ſo findet ſich in denſelben die Aufgabe von dem gröſten gemeinſamen Theiler zwoer Zahlen. Daß aber **Euclid** von der Aufgabe, die Theiler einer fürgegebenen Zahl zu finden, nicht Erwähnung thut, rührt ſchlechthin nur daher, weil er alles wegläßt, was er nicht auf eine ganz determinirte Art erweiſen konn-

Digitized by Google

konnte. Dieſe Aufgabe gehört einiger maſſen unter die Diophantiſchen; ſie iſt aber auch zum Theil davon verſchieden. Denn ungeachtet die Bedingung, daß die Theiler ganze Zahlen ſeyn müſſen, dabey vorkommt, ſo bleibt die Frage: wie viele Theile eine jede Zahl habe, ſchlechthin unbeſtimmt; weil man Zahlen findet, die ſo viele und ſo wenig Theiler haben, als man immer will. Dieſer Umſtand aber verurſacht, daß man in der Algebra die Frage von Erfindung der Theiler einer Zahl, ſchwerlich oder gar nicht auf eine Gleichung bringen kann. Man hat dabey kein ander Datum als die Zahl, deren Theiler zu ſuchen ſind. Von dieſer weiß man nicht voraus, ob ſie Theiler hat, oder nicht. Wolte man demnach die Theiler, oder wenigſtens die Factoren der fürgegebenen Zahl als Wurzeln einer Gleichung anſehen; ſo würde dieſe Zahl zwar das letzte Glied der Gleichung ſeyn, als welches allemal das Product der Wurzeln iſt. Hingegen bleibt die Anzahl der Glieder dieſer Gleichung, die Coefficienten derſelben und der Grad der Gleichung ganz unerörtert, bevor nicht die Factoren der fürgegebenen Zahl gefunden ſind. Man reicht eben ſo nicht aus, wenn man ſich mit einer quadratiſchen Gleichung begnügen, und nur zween Factores finden will.

§. 2.

Die Auflöſung, die man für dieſe Aufgabe angiebt, iſt, daß man die Zahl, deren Theiler man

man ſuchen will, durch jede kleinere Zahl wirklich theile, um dadurch, der Ordnung nach, zu finden, ob ſie Theiler habe oder nicht? Ich ſage, durch jede kleinere Zahl. Denn ungeachtet ſeit **Euclids** Zeiten an ſchon bewieſen iſt, daß man hiebey alle die Zahlen vorbey gehen kann, die nicht Primzahlen ſind, ſo ſetzt dieſes dennoch voraus, daß man die Primzahlen kenne. Es iſt aber die Erfindung der Primzahlen eben ſo ſchwer, als die Erfindung der Theiler einer Zahl, und man muß eben die Theilungen, die wir vorſchlagen, vornehmen, es ſey daß man eine Zahl als Primzahl erkennen, oder ihre Theiler finden will. Indeſſen läßt ſich die Arbeit auf eine gedoppelte Art abkürzen. Denn wenn die Theilung mit einer Zahl nicht angeht, ſo geht ſie auch mit jedem vielfachen dieſer Zahl nicht an, und eben ſo viele Theilungen können demnach erſparet werden. Verfährt man auf dieſe Art von 1 an gerechnet; ſo behält man allerdings nur jede Primzahlen, womit die Theilung vorgenommen werden muß. Sodann läßt ſich ohne Mühe erweiſen, daß, wenn eine Zahl Theiler hat, von dieſen Theilern eben ſo viele kleiner ſind als ihre Quadratwurzeln, als es deren giebt, die gröſſer ſind, und daß letztere gefunden ſind, ſobald man erſtere gefunden hat, weil jene die Quotienten von dieſen ſind. Dieſer Umſtand macht, daß man ſich begnügen kann, die Theilung nur mit denen Primzahlen vorzu-

Digitized by Google

nehmen, welche kleiner ſind, als die Quadratwurzel der Zahl, deren Theiler man ſuchen will.

§. 3.

Indeſſen wenn leicht dieſe Zahl ſich auf 100000, oder ein Million belåuft; ſo hat man ſo viele Theilungen vorzunehmen, daß man es gewiß nicht fůr die langeweile unternimmt, und anſteht, ob man die Zahl nicht eben ſo gut ungetheilt laſſe, oder aufgebe; zumal da man nicht voraus wiſſen kann, ob es nicht eine Primzahl iſt, und daher gar keine Zerfållung in Factoren zulåßt. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, alle dieſe Theilungen dergeſtallt unnőthig zu machen, daß man ohne eine einige davon vorzunehmen, dennoch jede Quotienten und jede Ueberreſte finden, und gleichſam in einer Reihe hinſchreiben kann. Man ſieht leicht, daß dieſes in einer gewiſſen Ordnung, oder nach einem allgemeinen Geſetze geſchehen můſſe. Und da die Ordnung, wie die Primzahlen auf einander folgen, noch ganz unbekannt iſt; ſo ſieht man auch leicht, daß es beſſer angehen werde, wenn man die Theiler entweder nach der natůrlichen Ordnung der Zahlen, oder wenigſtens nach einer andern ganz einfachen Ordnung nimmt. Ich werde indeſſen die Sache ſo vortragen, wie ich darauf geleitet worden. Dahin gehőren demnach folgende Betrachtungen.

§. 4.

Digitized by Google

§. 4.

Wenn eine Zahl kleine Theiler hat, dergleichen z. E. 2, 3, 5, 7, 11, 13 ꝛc. ſind, ſo iſt die Theilung damit bald vorgenommen, und die Probe fällt deſto leichter aus, weil man für dieſe Theiler Kennzeichen hat, daran ſich bald finden läßt, ob ſie in einer Zahl aufgehen, oder nicht. Hat hingegen eine Zahl nur groſſe Theiler, ſo iſt dieſes eben der Fall, wo man ſehr viele Theilungen mit den kleinern Primzahlen vergebens vornehmen muß. Man ſieht leicht, daß man hier durch groſſe Theiler ſolche verſtehen muß, die von der Quadratwurzel der Zahl, deren Theiler man ſucht, wenig unterſchieden ſind, oder ein geringes Verhältniß zu derſelben habe. Z. E. hat die Zahl 479707 nur die zween Theiler 491 und 977. Und dieſe werden groß genennt, weil ſie von der Quadratwurzel 692 + ... kaum um die Hälfte verſchieden ſind. Hingegen hat die Zahl 479708 allerdings einen gröſſern Theiler 239854; ſie hat aber auch einen ſehr kleinen 2. Man kann daher nicht ſagen, daß ſie lauter groſſe Theiler habe.

§. 5.

Wenn demnach eine Zahl A ſolche Theiler hat, die von ihrer Quadratwurzel nicht viel verſchieden ſind; ſo iſt es das natürlichſte, dieſelben auf folgende Art zu ſuchen. Man ziehe die Quadratwurzel derſelben in ganzen Zahlen aus, und ſehe zugleich auf den Ueberreſt der

Quadratwurzel in ganzen Zahlen, oder die von der nächſt kleinern Quadratzahl ſey $= a$, und der Ueberreſt $= b$, ſo iſt

$$A = aa + b.$$

Es iſt klar, daß wenn A ſelbſt eine Quadratzahl iſt, ſodann $b = 0$ wird. Da wir nun annehmen, A habe ſolche Theiler, die von a wenig verſchieden ſind, ſo nenne man den kleinern $a - x$, den gröſſern $a + x + y$, ſo iſt

$$A = aa + b = (a - x).(a + x + y)$$

und

$$\frac{A}{a - x} = \frac{aa + b}{a - x} = a + x + \frac{xx + b}{a - x}$$

$$= a + x + y$$

demnach wird

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

eine ganze Zahl ſeyn, welche zu $a + x$ addirt, den Theiler $a + x + y$ giebt. Man ſieht zugleich auch, daß der Zähler dieſes Bruches $xx + b$ der Ueberreſt iſt, welcher bleibt, wenn A durch $a - x$ getheilt, $a + x$ mal geht, oder wenn $a - x$ mit $a + x$ multiplicirt, von A abgezogen wird.

§. 6.

Man kann nun, um es im Vorbeygehen anzumerken, vermittelſt dieſer Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

ſprungsweiſe Zahlen beſtimmen, zwiſchen welche kein

Digitized by Google

kein Theiler von A fällt. Es ſey z. E. die Zahl 150737, ſo iſt die nächſt kleinere Quadratzahl 150544, ihre Wurzel 388 = a, und der Unterſchied b = 193, demnach

$$150737 = (388)^2 + 193$$

und
$$y = \frac{193 + xx}{388 - x}$$

eine ganze Zahl. Hier ſieht man nun leicht, daß man x wenigſtens = 14 nehmen müſſe, wenn y auch nur = 1 ſolle werden können; und daß demnach zwiſchen 388 und 388 — 14 = 374 kein Theiler der Zahl 150737 vorkomme. Man ſetze ferner x = 14 + p, ſo findet man

$$y = \frac{389 + 28p + pp}{374 - p} = 1 + \frac{15 + 29p + pp}{374 - p}$$

eine ganze Zahl. Hier ſieht man wiederum, daß p wenigſtens = 10 müſſe genommen werden, wenn der Quotient auch nur = 1 werden ſolte. Demnach iſt auch zwiſchen 374 und 364 kein Theiler der Zahl 150737. Man kann eben ſo fortfahren und p = 10 + q ſetzen; und ſo wird man

$$y - 2 = \frac{41 + 50q + qq}{364 - q}$$

erhalten, welches wiederum eine ganze Zahl ſeyn muß.

§. 7.

Will man hiebey der beſtändig wieder vorkommenden Reductionen entübrigt ſeyn, ſo

Digitized by Google

kehrt man die Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

um, indem man ſie in

$$2x + y = \sqrt{(4ay + yy - 4b)}$$

verwandelt. Hier muß demnach

$$4ay + yy - 4b$$

eine Quadratzahl ſeyn. Dieſes giebt in erſt angeführtem Beyſpiele, wo $a = 388$ und $b = 193$ iſt,

$$2x + y = \sqrt{(1552y - 772 + yy)}$$

woraus man für

y = 1	781 *	y = 11	16421 *
2	2336	12	17996
3	3893 *	13	19573 *
4	5452 *	14	21152 *
5	7013 *	15	22733 *
6	8576	16	24316
7	10141 *	17	25901 *
8	11708 *	18	27488 *
9	13277 *	19	29077 *
10	14848 *	20	30668 *
11	16421 *	21	32261 *
		22	33856 ꝛc.

findet. Ueber dieſe Zahlen bemerke man:

1. Daß, wenn die zwo erſten gefunden ſind, die folgenden durch bloſſes addiren gefunden werden. Denn ihre Unterſchiede ſind 1555, 1557, 1559, 1561, 1563 ꝛc. jeder folgende um 2 gröſſer.

2. Da

2.° Da dieſe Zahlen Quadrate ſeyn ſollen, ſo werden die meiſten von denen, die es nicht ſind, leicht an den Endigungen erkannt; dieſe ſind mit einem * bezeichnet.

3. Demnach bleiben nur noch die wenige bey $y = 2, 6, 12, 16, 22$ ꝛc. zu unterſuchen. Da nun von dieſen, wenn man die Probe anſtellt, nur die letzte 33856 eine Quadratzahl iſt, und 184 zur Wurzel hat, ſo findet man dadurch

$$2x + y = 2x + 22 = 184$$
$$x = 81$$

folglich den einen Theiler

$$388 - x = 307$$

den andern

$$388 + x + y = 491.$$

Und zugleich weiß man, daß, wenn auch die Zahl 150737 noch andere Theiler haben ſolte, derſelben keiner zwiſchen 307 und 491 falle.

§. 8.

Die erſtbemeldete Kennzeichen der Quadratzahlen, ſind folgende:

1. Keine Quadratzahl endet ſich mit 2, 3, 7, 8; ſondern die Endungen ſind

Digitized by Google

p 01	04	00	16	p 09
i 21	24	025	36	i 29
p 41	44	225	56	p 49
i 61	64	625	76	i 69
p 81	84		96	p 89

wo p überhaupt jede gerade Zahl, i aber jede ungerade bedeutet.

2.° Jede gerade Quadratzahl läßt ſich ſo vielmal durch 4 theilen, bis der Quotient ungerade wird. Geſchieht dieſes bey einer fürgegebenen geraden Zahl nicht, ſo iſt ſie keine Quadratzahl.

3.° Demnach laſſen ſich auch die zwo letzten Ziffern einer geraden Quadratzahl durch 4 theilen.

4.° Jede ungerade Quadratzahl um 1 vermindert, läßt ſich durch 8 theilen.

5.° Demnach auch die drey letzten Ziffern derſelben um 1 vermindert, können durch 8 getheilet werden.

6. Jede Quadratzahl, durch 9 getheilt, geht entweder auf, oder ſie läßt 1, 4, 7 im Ueberreſte.

7. Eine ungerade Quadratzahl, ſo durch 9 nicht theilbar iſt, läßt ſich, um 1 vermindert, durch 24 theilen.

Proben

Proben von dieſer Art giebt es noch unzählige. Man ſieht aber aus dieſer angeführten leicht, daß, wenn eine Zahl dieſelbe aushält, es ſehr wahrſcheinlich eine Quadratzahl ſey.

§. 9.

Man kann auch von dieſen Kennzeichen mehrere verbinden, und dadurch das Aufſuchen der Theiler einer Zahl abkürzen. Um dieſes durch ein Beyſpiel zu erläutern, ſo ſey die Zahl 479707 fürgegeben; und es ſolle gefunden werden, ob, oder welche Theiler ſie habe? Zieht man nach den vorhingegebenen Regeln (§. 6.) die Quadratwurzel aus, ſo findet man

$$479707 = (692)^2 + 843 = a^2 + b$$

demnach $a = 692$
$b = 843$

und folglich

$$2x + y = \sqrt{(2768\,y + yy - 3372)}$$

demnach für

y = 2	2168 *	y = 8	18836
3	4941 *	9	21621 *
4	7716	10	24408 *
5	10493 *	11	27197 *
6	13272 *	12	29988 *
7	16053 *	13	32781 *
		14	35576 ꝛc.

Dieſe Zahlen ſolten wiederum Quadratzahlen ſeyn; es werden aber vermöge der erſt angegebenen Kennzeichen, die mit einem * bezeich-

neten

neten leicht ausgeſchloſſen, und ſo bleiben nur noch die zu unterſuchen, welche bey $y = 4, 8, 14, 18$ ꝛc. ſtehen. Um nun auch von dieſen noch die meiſten auszuſchlieſſen, werden wir das ſechſte dieſer Kennzeichen gebrauchen, daß nemlich jede Quadratzahl durch 9 getheilt, müſſe 0, 1, 4, 7 übrig laſſen. Man ſetze demnach

$$y = 10m + 4 \quad \text{und} \quad y = 10m + 8$$

ſo verwandelt ſich der Ausdruck

$$2768y + yy - 3372$$

in folgende beyde

$$27760m + 100m^2 + 7716$$

und $$27840m + 100m^2 + 17836.$$

Dieſe beyde Ausdrücke theile man durch 9, und behalte nur die Ueberreſte, ſo iſt

der erſte: $4m + 3 + mm$ — der zweyte: $3m + 7 + mm.$

Man ſetze nun für m die Werthe von 0 bis 8, und indem man wiederum durch 9 dividiret, behalte man ebenfalls nur die Ueberreſte, ſo findet ſich

für m = 0	3	für m = 0	7*
1	8	1	2
2	6	2	8
3	6	3	7*
4	8	4	8
5	3	5	2
6	0*	6	7*
7	8	7	5
8	0*	8	5

Unter

Unter dieſen Ueberreſten finden ſich nur 0 und 7, welche bey Quadratzahlen vorkommen. Demnach werden für m auch nur die Werthe

6	0
8	3
15	6
17	9
24	12
26 ꝛc.	15 ꝛc.

beybehalten, welches für y die Werthe

64	8
84	38
154	68
ꝛc.	98 ꝛc.

giebt. Wir können aber bey m und den Ausdrücken

$$27760\,m + 100\,m^2 + 7716$$
$$27840\,m + 100\,m^2 + 17836$$

bleiben. Wird demnach in dieſen

$m = 6$	$m = 0$
8	3
15	6
ꝛc.	9 ꝛc.

geſetzt, ſo findet ſich

für		für	
$m = 6$	177976	$m = 0$	17836
$= 8$	236196*	$= 3$	25314
	ꝛc.	$= 6$	188476 ꝛc.

Hier

Hier iſt nun $\frac{236196}{4} = \frac{59049}{(9)} = \frac{6561}{(9)}$

$$= \frac{729}{(9)} = \frac{81}{(9)} = \frac{9}{(9)} = 1;$$

demnach die Quadratwurzel $= 2.3.3.3.3.3. = 486 = 2x + y$ und $y = 10m + 4 = 84$.

Demnach $2x + 84 = 486$

$x = 201$

$a - x = 692 - 201 = 491$ der erſte Theiler,

$a + x + y = 692 + 201 + 84 = 977$ der andere Theiler.

Da die übrige Zahlen 177976, 17836, 25314, 188476 keine Quadratzahlen ſind, welches vermittelſt der Theilung durch 4 leicht erhellet, ſo folgt auch, daß die fürgegebene Zahl 479707, wenn ſie auſſer den beyden Theilern 491 und 977 noch andere hätte, derſelben keiner zwiſchen dieſe beyde falle.

§. 10.

Um nun wiederum zu dem §. 5. zurücke zu kehren, ſo haben wir daſelbſt angemerkt, daß in der Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

der Zähler dieſes Bruches $xx + b$, der Ueberreſt iſt, welcher bleibt, wenn $a - x$ in A getheilt, $a + x$ mal geht; oder wenn $a - x$, $a + x$ male genommen von A abgezogen wird.

Setzt

Setzt man nun für x der Ordnung nach 0, 1, 2, 3, 4 ꝛc. ſo ſieht man leicht, daß in

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

der Zähler immer gröſſer, der Nenner aber immer kleiner wird, und daß daher nach und nach y gröſſer als 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. werden muß. Es iſt aber, wenn man A durch a — x theilt, der Quotient

$$a + x + y = a + x + \frac{xx + b}{a - x}$$

demnach wächſt dieſer nicht nur um die Einheiten von x, ſondern zugleich auch, wiewohl langſamer, um die von y. Ferner ſieht man, daß die Ueberreſte xx + b anfangs wie die Quadrate von x, und daher ihre Unterſchiede wie die ungerade Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 ꝛc. anwachſen, bis ſie gröſſer als der Theiler a — x werden. Wird demnach, ſo bald dieſes geſchiehet, a — x von xx + b abgezogen, ſo wird der Quotient um 1 gröſſer, und die folgenden Ueberreſte nehmen nun ebenfalls ſtärker zu. Denn man ſetze, das Abziehen geſchehe, wo x = c wird, ſo iſt der Ueberreſt für x = c

vor dem Abziehen	nach dem Abziehen
$cc + b$	$cc + c + b - a$

demnach für die nächſtfolgende Stelle $x = c + 1$

$cc + 2c + 1 + b$	$cc + 3c + 2 + b - a$

und daher das Anwachſen dieſer Ueberreſte

$2c + 1$	$2c + 2$

woraus

woraus man ſieht, daß, wenn man das Abziehen wirklich vornimmt, die folgende Ueberreſte um 1 ſtärker anwachſen, als wenn man das Abziehen nicht vorgenommen hätte.

§. 11.

Da ſich alles dieſes in einem Beyſpiele klärer zeigen läßt, ſo ſey die Zahl 10007 durch jede kleinere Zahlen zu theilen, und die zu jedem Theiler gehörige Quotienten und Ueberreſte zu finden. Nun iſt $10007 = (100)^2 + 7 = aa + b$, demnach $a = 100$ und $b = 7$, folglich $$y = \frac{7 + xx}{100 - x}$$

Dieſes giebt nun folgende Tabelle für jede Theiler $100 - x$.

§. 12.

In dieſer Tabelle enthält die Columne A die Theiler $100 - x$. In der Columne B ſteht neben jedem Theiler der Ueberreſt. Die dritte Columne C giebt die Unterſchiede, oder die allmählige Zunahme dieſer Ueberreſte an. Endlich kommen in der vierten Columne D die Quotienten in ganzen Zahlen vor. Alle dieſe Zahlen laſſen ſich nun allerdings finden, wenn man, der Ordnung nach, die fürgegebene Zahl 10007 durch 100, 99, 98, 97, 96 ꝛc. theilen will. Da es aber ſehr langweilig iſt, ſo viele Theilungen vorzunehmen, ſo iſt es unſtreitig

A	B	C	D
100	7		100 (I)
99	8	1	101
98	11	3	102
97	16	5	103
96	23	7	104
95	32	9	105
94	43	11	106
93	56	13	107
92	71	15	108
91	88	17	109
90	107	19	110
90	17		111
89	39	22	112
88	63	24	113
87	89	26	114
87	2		115
86	31	29	116
85	62	31	117
84	95	33	118
84	11		119
83	47	36	120
82	85	38	121
82	3		122
81	44	41	123
80	87	43	124
80	7		125
79	53	46	126
78	101	48	127
78	23		128
77	74	51	129
76	127	53	130

A	B	C	D
76	51		131
75	107	56	132
75	32		133
74	91	59	134
74	17		135
73	79	62	136
73	6		137
72	71	65	138
71	138	67	139
71	67		140
70	67	0 (70)	142 (II)
69	71	4	144
69	2		145
68	11	9	147
67	24	13	149
66	41	17	151
65	62	21	153
64	87	25	155
64	23		156
63	53	30	158
62	87	34	160
62	25		161
61	64	39	163
61	3		164
60	47	44	166
59	95	48	168
59	36		169
58	89	53	171
58	31		172
57	32	1 (58)	175 (III)
56	39	7	178
55	52	13	181
54	71	19	184

A	B	C	D
54	17		185
53	43	26	188
52	75	32	191
52	23		192
51	62	39	195
51	11		196
50	57	46	199
50	7		200
49	11	4 (53)	204 (IV)
48	23	12	208
47	43	20	212
46	71	28	216
46	25		217
45	62	37	221
45	17		222
44	19	2 (46)	227 (V)
43	31	12	232
42	53	22	237
42	11		238
41	44	33	243
41	3		244
40	7	4 (44)	250 (VI)
39	23	16	256
38	51	28	262
38	13		263
37	17	4 (41)	270 (VII)
36	35	18	277
35	67	32	284
35	32		285
34	45	13 (47)	293 (VIII)
34	11		294
33	41	30	302

A	B	C	D
33	8		303
32	23	15 (47)	312 (IX)
31	25	2 (33)	322 (X)
30	47	22	332
30	17		333
29	31	14 (43)	344 (XI)
29	2		345
28	11	9 (37)	357 (XII)
27	17	6 (33)	370 (XIII)
26	23	6 (32)	384 (XIV)
25	32	9 (34)	399 (XV)
25	7		400
24	23	16 (40)	416 (XVI)
23	48	25 (48)	433 (XVII)
23	25		434
23	2		435
22	41	39 (61)	453 (XVIII)
22	19		454
21	74	55 (76)	473 (XIX)
21	53		474
21	32		475
21	11		476
20	87	76 (96)	496 (XX)
20	67		497
20	47		498
20	27		499
20	7		500
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

eine

eine beträchtliche Abkürzung, wenn alle dieſe Zahlen durch bloſſes Addiren gefunden, und gleichſam nur hingeſchrieben werden können, ſo bald man vermittelſt der Ausziehung der Quadratwurzel aus der fürgegebenen Zahl 10007 die drey erſten Zahlen

100 7 100

gefunden hat.

§. 13.

Dieſes geht nun nach folgenden Regeln an:

1.° Erhellet aus der (§. 11.) gefundenen Formel $y = \frac{7 + xx}{100 - x}$ daß die erſten Ueberreſte nach den Quadraten xx demnach ihre Unterſchiede nach den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 ꝛc. anwachſen.

2.° Daher finden ſich in der dritten Columne C. dieſe ungerade Zahlen, der Ordnung nach, bis auf 19; und bis eben ſo weit ſind ſie in der zweyten Columne B zu dem erſten Ueberreſte 7 addirt. Man begreift leicht, daß wenn 10007 eine Quadratzahl wäre, dieſer erſte Ueberreſt = 0 ſeyn, und demnach die zweyte Columne die Quadrate 1, 4, 9, 16, 25 ꝛc. enthalten würde.

3. Nun findet ſich die erſtbemeldte Ordnung bey dem Theiler 90 unterbrochen: denn

Digitized by Google

19 zu 88 addirt, giebt 107. Da nun dieſer Ueberreſt gröſſer iſt als der Theiler, ſo wird dieſer davon abgezogen, und ſo bleibt 17, welcher nunmehr kleinere Ueberreſt, unter 107 und ebenfals neben 90 geſetzt iſt; ſo, daß auf dieſe Art 90 zwey mal vorkömmt.

4. Sodann nahmen die Quotienten in der Columne D, welche überhaupt

$$100 + x + y = 100 + x + \frac{7 + xx}{100 - x}$$

ſind, bis eben dahin, der Ordnung nach, um 1 zu. Von da an wird jeder um 1 gröſſer. Denn da 90 mal 110 = 9900 von 10007 abgezogen 107, demnach mehr als 90 übrig läßt; ſo ſieht man leicht, daß ſich in der That 90 mal 110 + 1, oder 90 mal 111 abziehen laſſen. Und dieſes macht, daß der Quotient 111 neben dem zweyten 90 und nicht neben 89 ſteht, wo er ſonſt würde zu ſtehen gekommen ſeyn, wenn man nicht 90 von 107 abgezogen hätte.

5. Endlich ſieht man in der dritten Columne C daß von 19 nicht auf 21, ſondern auf 22 geſprungen wird. Dieſes würde ebenfalls nicht ſeyn, wenn nicht 90 wäre von 107 abgezogen worden. Denn ſo würde man

Digitized by Google

A	B	C	D
90	107	19	110
89	128	21	111
88	151	23	112
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

gehabt haben. Da aber auf dieſe Art alle Ueberreſte B gröſſer ſeyn würden als ihre Theiler A, ſo müßten dieſe ſämtlich abgezogen werden. Man ziehe ſie wirklich ab, ſo wird jeder Quotient D um 1 gröſſer, und man erhält

90	17	19	111
89	39	22	112
88	63	24	113
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

demnach eben die Zahlen, wie ſie in der Tafel ſind. Man verfährt daher kürzer, wenn man, wie es in der Tafel geſchehen, 90 von 107 abzieht, und ſodann von 19 auf 22 ſpringt.

6.° Da nun die Ueberreſte durch das beſtändige Addiren der Unterſchiede, ſo in der Columne C ſind, immer anwachſen; ſo ſieht man leicht, daß im folgenden wiederum müßten Subtractionen vorgenommen werden, ſo oft ein Ueberreſt anfängt gröſſer als der Theiler zu werden.

7.° Dieſes geſchieht auch würklich bey den Theilern 87, 84, 82, 80, 78, 76, 75, 74, 73, 71, welche daher eben ſo wie vorhin

90 doppelt vorkommen, und wo die Unterſchiede C ebenfalls um 3 gröſſer werden.

8.° Bis dahin geht demnach alles nach einem ſehr einfachen Geſetze. Hingegen fängt bey dem Theiler 70 eine neue Ordnung an; und dieſes geſchieht immer wo der Quotient anfängt, doppelt, drey, vier, fünf ꝛc. mal gröſſer als der Theiler zu werden.

9.° Um dieſe Abänderungen aber, der Ordnung nach, zu betrachten, ſo ſieht man, daß bey 71 der Ueberreſt 138 ſteht, und demnach 71 davon abgezogen werden muß. Dieſes Abziehen macht, daß man in der Columne C von 67 auf 70 kömmt, welche Zahl nun eben ſo groß iſt als der Theiler; demnach wird ſie zu dem neben dem 71 ſtehenden Ueberreſt 67 nicht erſt addirt, weil man den Theiler 70 von der Summe wiederum abziehen müßte. Ich habe demnach in der Columne C 70 in ( ) eingeſchloſſen, und o voran geſetzt, welches anzeigt, daß der neben 71 ſtehende Ueberreſt 67 nicht vermehrt werde, ſondern ebenfalls neben den Theiler 70 zu ſtehen komme.

10. Da nun aber dadurch der Quotient um 1 gröſſer wird, ſo ſteht auch neben dem Theiler 70 nicht 141, ſondern 142.

11. Da

11. Da ferner bey dem Theiler 70 eine Subtraction geſchehen, ſo ſolte in der Columne C neben 69 nunmehr 73 ſtehen; da ſich aber auch hievon 69 abziehen läßt, und 4 übrig bleibt, ſo habe ich auch nur 4 neben 69 geſetzt, welches zu 67 addirt, den Ueberreſt 71 giebt. Man ſieht auch leicht, daß ebenfalls wegen des Abziehens, der Quotient um 1 gröſſer, und demnach 144 werden muſte.

12. Aus gleichen Gründen nehmen von da an die Quotienten um 2, die Unterſchiede C um 4 zu, jedoch mit dem Bedinge, daß, wo die Ueberreſte gröſſer als die Theiler werden, daſelbſt wiederum ſubtrahirt, der Theiler doppelt geſetzt, der Quotient um 1 vermehrt, und in der Columne C 4 + 1 oder 5 addirt wird; wie man es bey den Theilern 69, 64, 62, 61, 59 ſehen kann.

13. Bis dahin geht es nach der zweyten Ordnung. Die dritte fängt aus ganz ähnlichen Gründen bey 57 an. Denn da würde in der dritten Columne 58 zu ſtehen kommen, wenn man nach der zweyten Ordnung fortfahren wolte. Da aber 58 bereits gröſſer iſt als der Theiler 57, ſo habe ich 58 in ( ) eingeſchloſſen, und dafür 1 geſetzt, um der Subtractionen überhoben zu ſeyn. Dieſes machte aber, daß

nun die Quotienten um 3, die Zahlen C um 6 gröſſer werden, doch ebenfalls mit dem Bedinge, daß, wo die Ueberreſte gröſſer als die Theiler werden, daſelbſt wiederum ſubtrahirt, der Theiler doppelt geſetzt, der Quotient um 1 vermehrt, und in der Columne C 6 + 1 oder 7 addirt wird, wie man es bey den Theilern 54, 52, 51, 50 ſehen kann.

14. Auf dieſe Art geht es auch mit den folgenden Ordnungen, deren Anfang in der Columne D mit römiſchen Zahlen gezeichnet ſteht. Bey jeder Ordnung wachſen die Theiler um ſo viel Einheiten als die Zahl der Ordnung angiebt, die Unterſchiede C aber um doppelt ſo viel. Doch immer mit Vorbehalte des Umſtandes, wo eine Subtraction vorgenommen wird.

15. Man ſieht auch leicht, daß die Ordnungen immer näher zuſammen kommen, oder ſich auf weniger Theiler erſtrecken. Dieſes macht auch, daß man die Aufmerkſamkeit wegen der Abwechſelung der Zahlen in der Columne C verdoppeln muß.

16. So z. E. bey dem Theiler 29 fängt die XIte Ordnung an, und zugleich wird 29 von 31 abgezogen; dieſes macht, daß man in C 2. XI + 1 = 23 zu 14 addiren muß, um (37) zu erhalten. Nun wird der Theiler 28 von (37) abgezogen, und

und dieſes macht, daß die XIIte Ordnung anfängt. Der Unterſchied 37 — 28 = 9 wird vor (37) geſetzt und zu 2 addirt, um den Ueberreſt 11 zu haben. Endlich wird 345 + XII = 357 der Quotient; ſodann giebt 2. XII + 9 = 24 + 9 = (33), und 33 — 27 = 6, und 6 + 11 = 17. Und wegen des Abziehens fängt die XIIIte Ordnung an; ſo, daß 357 + XIII = 370 der Quotient wird ꝛc.

17. Bey dem Theiler 23 wird zweymal, bey 21 dreymal, bey 20 viermal ſubtrahirt; weil die Zahlen C immer gröſſer, die Theiler aber immer kleiner werden. Ich habe demnach bey 20 abgebrochen, weil nachgehends die Quotienten ſo ſchnelle wachſen, daß des ſubtrahirens kein Ende wird.

18. Noch iſt anzumerken, daß es Fälle giebt, wo gleich Anfangs ſubtrahirt werden muß. So z. E. wenn anſtatt der Zahl 10007 die Zahl 10157 wäre vorgenommen worden zu theilen; ſo würde a = 100, b = 157 geweſen ſeyn. Demnach hätte man

A	B	C	D
100	157		100
100	57		101
99	59	2	102
98	63	4	103
97 ꝛc.	69 ꝛc.	6 ꝛc.	104 ꝛc.

und folglich gleich Anfangs zu ſubtrahiren gehabt; und ſo wären auch die Unterſchiede C gleich Anfangs um 1 gröſſer geweſen.

§. 13.

Das bisher geſagte betrift den Fall, wo man a — x als Theiler anſieht. Man kann aber auch a + x als Theiler anſehen, und da erhält man

$$\frac{A}{a+x} = \frac{aa+b}{a+x} = a - x + \frac{xx+b}{a+x}$$

Setzt man demnach für x der Ordnung nach 0, 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. ſo wird der Theiler a + x der Ordnung nach um 1 gröſſer, der Quotient

$$a - x + \frac{xx+b}{a+x}$$

der Ordnung nach um 1 kleiner, ausgenommen an denen Stellen wo der Bruch

$$\frac{xx+b}{a+x}$$

anfängt gröſſer als 1, 2, 3, 4 ꝛc. zu werden, welches aber hier, wo der Theiler immer anwächſt, nicht ſo ofte wie in den vorhergehenden Fall geſchieht. Man ſieht auch leicht, daß, weil hier der Theiler von a bis auf A = aa + b anwachſen kann, die Berechung von jeden Quotienten und Ueberreſten um ſo viel mehr verlängert wird. Denn ſo z. E. hatten wir vorhin bey der Zahl 10007 nur die Theiler von

100

100 bis 1; hingegen haben wir hier Theiler die von 100 bis 10006 gehen. Bey noch gröſſern Zahlen wird dieſer Unterſchied noch gröſſer. Uebrigens wird die länger dauernde Arbeit bey den Theilern a + x dadurch leichter gemacht, daß man hier nicht auf ſo viele Abwechslungen von Ordnungen zu ſehen hat. Ich werde nun, um das Verfahren zu erläutern, eben die Zahl 10007 vornehmen, ohne jedoch die daraus erwachſende Tabelle bis zum Ende fortzuſetzen, weil die Berechnung von Anfang bis zum Ende gleich einfach bleibt.

§. 14.

Hier ſind nun wiederum in A die Theiler, in B ihre Ueberreſte, in C deren Unterſchiede, in D die Quotienten. Bey dem Theiler 111 geht die erſte Subtraction vor, weil der Ueberreſt 128 gröſſer als der Theiler iſt. Dadurch wird der Quotient, welcher 89 war, in 90 verwandelt, und in der Columne C geht man nun von 21 nur zu 22. Denn die Subtraction, die mit 111 vorgenommen worden, iſt ſo gut als mit allen folgenden Theilern vorgenommen. Da aber bey den folgenden Theilern nicht 111, ſondern der Theiler ſelbſt, oder 112, 113, 114, 115 ꝛc. hätte müſſen abgezogen werden, ſo wird dieſe Verminderung der dazu gehörenden Ueberreſte dadurch erhalten, daß die Unterſchiede C nicht 23, 25 ꝛc. ſondern nur 22, 24, 26 ꝛc. genommen werden. Eine eben derglei-

chen

A	B	C	D
100	7		100
101	8	1	99
102	11	3	98
103	16	5	97
104	23	7	96
105	32	9	95
106	43	11	94
107	56	13	93
108	71	15	92
109	88	17	91
110	107	19	90
111	128	21	89
111	17		90
112	39	22	89
113	63	24	88
114	89	26	87
115	117	28	86
115	2		87
116	31	29	86
117	62	31	85
118	95	33	84
119	130	35	83
119	11		84
120	47	36	83
121	85	38	82
122	125	40	81
122	3		82
123	44	41	81
124	87	43	80
125	132	45	79
125	7		80
126	53	46	79
127	101	48	78
128	151	50	77
128	23		78

A	B	C	D
129	74	51	77
130	127	53	76
131	182	55	75
131	51		76
132	107	56	75
133	165	58	74
133	32		75
134	91	59	74
135	152	61	73
135	17		74
136	79	62	73
137	143	64	72
137	6		73
138	71	65	72
139	138	67	71
140	207	69	70
140	67		71
141	137	70	70
142	209	72	69
142	67		70
143	140	73	69
144	215	75	68
144	71		69
145	147	76	68
145	2		69
146	79	77	68
147	158	79	67
147	11		68
148	91	80	67
149	173	82	66
149	24		67
150	107	83	66
151	192	85	65
151	41		66
152	127	86	65

chen Verminderung geht auch bey jeder folgenden Subtraction, z. E. bey den Theilern 115, 119, 122, 125, 128, 131, 133 ꝛc. vor.

§. 15.

Es iſt nun die Frage, dieſe Methode, wodurch unzählige Diviſionen in ein bloſſes addiren und ſubtrahiren verwandelt werden, bey der Aufgabe von Erfindung der Theiler einer Zahl anzuwenden. Man ſieht von ſelbſt, daß es hiebey eigentlich nur auf die Ueberreſte ankömmt. Die in erſtgegebenem Beyſpiele gebrauchte Zahl 10007 iſt eine Primzahl; und ſo iſt ſich nicht zu verwundern, daß in den Columnen B kein Ueberreſt = 0 wurde. Denn man ſieht leicht, daß dieſes geſchehen muß, ſo ofte die Zahl, ſo man auf dieſe Art behandelt, wirklich Theiler hat. Man ſieht auch leicht, daß der Ueberreſt deſto früher = 0 wird, je näher ein Theiler der Quadratwurzel der Zahl kömmt, deren Theiler man ſucht. So z. E. wenn die Zahl 53297 fürgegeben, iſt

$$53297 = (230^2) + 397,$$

demnach hat man (§. 13. No. 18.)

A	B	C	D
230	397		230
230	167		231
229	169	2	232
228	173	4	233
227	179	6	234
226	187	8	235
225	197	10	236
224	209	12	237
223	223	14	238
223	0		239

Da

Da hier der erſte Ueberreſt 397 bereits gröſſer iſt als der Theiler, ſo wird gleich Anfangs die Subtraction vorgenommen, und daher die Unterſchiede C um 1 vermehrt, = 2, 4, 6, 8 ꝛc. Bey 223 kömmt die zweyte Subtraction vor. Und da der Ueberreſt = 0 wird; ſo folgert man ohne weiters, daß die fürgegebene Zahl 53297 das Product aus 223 und 239 ſey. Es iſt für ſich klar, daß man ungleich länger würde zu rechnen gehabt haben, wenn man 53297 durch alle Primzahlen von 1 bis 223 hätte wirklich dividiren wollen; und daß demnach durch dieſe Methode gerade diejenigen Theiler am kürzeſten gefunden werden, die man ſonſt am mühſamſten durch das Dividiren mit Primzahlen findet.

§. 16.

Da man aber nicht voraus wiſſen kann, ob eine Zahl ſo ſchickliche Theiler habe, ſo würde in jeden andern Fällen der Vortheil dieſer Methode nur in der Abkürzung beſtehen, wodurch alle ſolche Diviſionen erſpahrt werden. Dieſer Vortheil iſt zwar allemal an ſich beträchtlich; es findet ſich aber noch ein anderer mit ein, und dieſer macht, daß auch dann, wo eine fürgegebene Zahl entweder nur kleine, oder auch gar keine Theiler hat, man nicht nöthig hat, die Theiler ſämtlich durch die Muſterung gehen zu laſſen; ſondern, daß man ſich mit denen begnügen kann, welche ſich in einem dem

Bezir-

Bezirke der oben (§. 12. No. 14.) ſogenannten erſten Ordnung befinden. Oder, welches einerley iſt, man ſetzt die Tabelle nur ſo weit fort, bis der Quotient anfängt doppelt gröſſer als der Theiler zu werden.

§. 17.

Um dieſes zu erweiſen, und zugleich durch ein Beyſpiel aufzuklären, werden wir wiederum die Zahl 10007 vornehmen, und dabey ſetzen, die Tabelle (§. 11), ſo wir für dieſelbe berechnet, ſey nur bis auf den Theiler 70 fortgeſetzet. Da nun bis dahin kein Ueberreſt $B = 0$ iſt; ſo ſieht man ſogleich, daß, wenn auch die Zahl 10007 Theiler haben ſolte, deren keiner zwiſchen 70 und 142 falle. Nun ſage ich, daß wenn die Zahl 10007 einen Theiler z haben ſolte, der kleiner als 70 iſt, dieſes ſich an denen bis zu dem Theiler 70 berechneten Theilern, Ueberreſten und Quotienten erkennen laſſe. Denn was auch immer z für eine Zahl ſeyn mag, ſo fällt wenigſtens ein Multiplum davon zwiſchen 70 und 142, oder auch nur zwiſchen 70 und 140; und zwar wird es

2z	ſeyn, wenn z zwiſchen	35	und	70
4z	. . .	18	.	35
8z	. . .	9	.	17
16z	. . .	5	.	8
32z	. . .	3	.	4
64z	. . .	2	.	2
128z	. . .	1	.	1

fällt.

fällt. Demnach wird ein Multiplum von z, und zwar wenigſtens eines, zwiſchen 70 und 140 fallen, und daher unter denen von 100 bis 70 berechneten Theilern oder unter ihren Quotienten vorkommen. Dazu kommt nun noch der Umſtand, daß, wo auch immer dieſes Multiplum vorkommt, der in B dabey befindliche Ueberreſt, entweder der Theiler z ſelbſt, oder wenigſtens ein Multiplum davon iſt. Das will nun ſagen: wenn unter den bis zu dem Theiler 70 in B befindlichen Ueberreſten einer vorkommt, der entweder mit dem Theiler oder mit dem Quotienten commenſurabel iſt, ſo, daß entweder der Ueberreſt und der Theiler, oder der Ueberreſt und der Quotient, oder alle drey ſich durch einerley Zahl dividiren laſſen; ſo iſt dieſe Zahl zugleich auch ein Theiler der fürgegebenen Zahl 10007. Geht es aber bey keinem der Ueberreſte an, ſo iſt 10007 eine Primzahl. Denn da der Vorausſetzung zufolge z in 10007 getheilt werden kann, ſo wird 10007 durch das Multiplum n z getheilt, entweder ebenfalls aufgehen, oder z, 2 z, 3 z, 4 z .... m z übrig laſſen, nemlich eben ſo vielmal z, als n in (10007:z) getheilt, Einheiten übrig läßt. Laſſet uns nun dieſes durch einige Beyſpiele erläutern.

§. 18.

Es ſeyn die Theiler der Zahl 217871 zu finden. Hier iſt

$$217871 = (466)^2 + 715$$

dem-

demnach

A	B	C	D	A	B	C	D
466	715	—	466	455	381	22	478
466	249		467	454	405	24	479
465	251	2	468	453	431	26	480
464	255	4	469	452	459	28	481
463	261	6	470	452	7		482
462	269	8	471	451	38	31	483
461	279	10	472	450	71	33	484
460	291	12	473	449	106	35	485
459	305	14	474	448	143	37	486
458	321	16	475	447	182	39	487
457	339	18	476	446	223	41	488
456	359	20	477				

Da ſich nun hier bey dem Theiler 446 der Ueberreſt 223 findet, welcher halb ſo groß als der Theiler iſt; ſo iſt 223 ein Theiler der fürgegebenen Zahl 217871. Nimmt man die Theilung vor, ſo iſt der Quotient $977 = 2 \cdot 488 + 1$. Denn da 446 in 217871 getheilt, $488\frac{1}{2}$ mal geht, ſo geht die Hälfte von 446 doppelt ſo viel, oder 977 mal. Will man nun ſehen, ob 977 Theiler habe; ſo iſt

$$977 = (31)^2 + 16$$

demnach

A	B	C	D
31	16		31
30	17	1	32
29	20	3	33
28	25	5	34
27	32	7	35
27	5		36
26	15	10	37
25	27	12	38
25	2		39
24	17	15	40
23	34	17	41
23	11		42
22	31	20	43
22	9		44

Dieſe Tabelle wird nur bis zu den Theiler 22 fortgeſetzt, weil ſchon dieſer den doppelt gröſſern Quotienten 44 giebt. Sie muſte aber bis dahin fortgeſetzet werden, weil unter den Ueberreſten B keiner vorkame, der mit ſeinen zugehörenden Theiler oder Quotienten commenſurabel wäre; demnach iſt 977 eine Primzahl.

§. 19.

Wenn eine Zahl kleine Theiler hat, ſo darf man die dafür zu berechnende Tabelle nicht weit fortſetzen, weil ihre Multipla ſich bald zeigen. Es ſeyn z. E. die Theiler der Zahl 391391 zu ſuchen,

ſuchen, wo man leicht ſieht, daß ſie deren haben muß, und daß wenigſtens 391 und 1001 ſolche ſind. Nun iſt

$$391391 = (625)^2 + 766$$

demnach

A	B	C	D
625	766		625
625	141		626
624	143	2	627
623	147	4	628
622	153	6	629
621	161	8	630

Es iſt unnöthig die Tabelle weiter fortzuſetzen: denn

143	und	624	laſſen ſich durch	13 theilen.
143	=	627	= = = =	11 =
147	=	623	= = = =	7 =
153	=	622	= = = =	17 =
161	=	621	= = = =	23 =
161	=	630	wiederum durch	7 theilen.

Und da man leicht ſieht, daß ſchon das Product aus 7, 11, 13, 17, 23 die Zahl 391391 geben wird, wie es dieſelbe auch wirklich giebt; ſo ſind die einfachſten Factoren dieſer Zahl ſämtlich gefunden. Da übrigens ſo viele kleine Factoren ebenfalls viele nicht gar groſſe Producte haben, ſo kann es nicht fehlen, daß nicht auch von dieſen die Multipla bald vorkommen ſolten. Wir wollen zu dieſem Ende die Tabelle um etwas weiter fortſetzen:

621	161	8	630
620	171	10	631
619	183	12	632
618	197	14	633
617	213	16	634
616	231	18	635
615	251	20	636
614	273	22	637
613	297	24	638
612	323	26	639
611	351	28	640
610	381	30	641
609	413	32	642
608	447	34	643
607	483	36	644
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Hier findet ſich nun bereits, daß

231 und 616 durch 77 oder 7 mal 11,
273 = 637 = = 91 = 7 = 13,
483 = 644 = = 161 = 7 = 23,

und auſſer dem wiederum

297 und 638 durch 11,
323 = 639 = = 17,
413 = 609 = = 7 theilbar ſind.

§. 20.

So giebt es auch ſehr häufig ſolche Fälle, wo die Theiler unter den Ueberreſten ſo gleich ſelbſt zum Vorſchein kommen. Denn man ſieht leicht, daß dieſes in erſt angeführtem Beyſpiele ſchlechthin nur deswegen nicht geſchehen, weil

weil die erſten Ueberreſte an ſich ſchon viel gröſſer als die Theiler waren. So z. E. iſt

$$35351 = (188)^2 + 7$$

demnach

A	B	C	D
188	7		188
187	8	1	189
186	11	3	190
185	16	5	191
184	23	7	192

Hier findet ſich nun ſchon 184 = 8. 23: ſo, daß demnach 23 ein Theiler der fürgegebenen Zahl 35351 iſt. Wenn man aber auch weiter fortfährt,

183	32	9	193
182	43	11	194
181	56	13	195
180	71	15	196
179	88	17	197
178	107	19	198
177	128	21	199
176	151	23	200
175	176	25	201
175	1		202
174	29	28	203

ſo kömmt man auf 174 = 6. 29, ſo, daß demnach auch 29 ein Theiler von 35351 iſt. Da man nun voraus ſehen kann, daß der dritte Theiler 53 ſeyn müſſe, ſo darf man nur noch ein wenig die Rechnung forſetzen, um auf den Quo-

Quotienten 212 = 4. 53, oder auf den Theiler A = 159 = 3. 59 zu kommen. Es iſt

159 = 3·53

173	59	30	204
172	91	32	205
171	125	34	206
170	161	36	207
169	199	38	208
169	30		209
168	71	41	210
167	114	43	211
166	159	45	212
165	206	47	213
165	41		214
164	91	50	215
163	143	52	216
162	197	54	217
162	35		218
161	92	57	219
160	151	59	220
159	212	61	221
159	53		222.

Hier kömmt demnach der dritte Factor 53 zum Vorſchein.

§. 21.

Es giebt aber auch Fälle, wo man die Rechnung beynahe eben ſo weit fortſetzen muß, um die Theiler zu finden, als wenn die Zahl eine Primzahl wäre. Dahin gehört z. E. die Zahl 10001, welche $= (100)^2 + 1$ iſt. Man

hat

Digitized by Google

hat demnach

A	B	C	D
100	1		100
99	2	1	101
98	5	3	102
97	10	5	103
96	17	7	104
95	26	9	105
94	37	11	106
93	50	13	107
92	65	15	108
91	82	17	109
90	101	19	110
90	11		111
89	33	22	112
88	57	24	113
87	83	26	114
86	111	28	115
86	25		116
85	56	31	117
84	89	33	118
84	5		119
83	41	36	120
82	79	38	121
81	119	40	122

A	B	C	D
81	38		123
80	81	43	124
80	1		125
79	47	46	126
78	95	48	127
78	17		128
77	68	51	129
76	121	53	130
76	45		131
75	101	56	132
75	26		133
74	85	59	134
74	11		135
73	73	62	136
73	0		137
72	65	65	138
71	132	67	139
71	61		140
70	131	70	141
70	61		142

Hier fande ſich demnach bis auf A = 73 kein Ueberreſt B, welcher mit ſeinem Theiler, oder mit ſeinem Quotienten commenſurabel geweſen wäre. Bey A = 73, wird B = 0, und dem-

nach iſt 10001 = 73. 137. Und dieſe Factoren müſſen Primzahlen ſeyn.

§. 22.

Wir können nun noch zugleich anmerken, daß wenn man eine ſolche Tabelle für eine Zahl bis dahin berechnet hat, wo der Quotient doppelt ſo groß wird, als der Theiler, eine ſolche Tabelle zugleich auch für Zahlen dienen kann, die um einige Einheiten, oder auch um mehrere gröſſer oder kleiner ſind als die Zahl, für welche die Tabelle iſt berechnet worden. So z. E. wenn die Theiler der Zahl 10003 zu finden ſind; ſo werden in der erſt für die Zahl 10001 berechneten Tabelle, alle Ueberreſte B um 2 gröſſer. Alles Uebrige bleibt. Man ſieht ſodann bald, daß z. E. der dritte Ueberreſt 5 ſich in 5 + 2 = 7 verwandelt, und daß der dabey ſtehende Theiler A = 98 durch 7 getheilet werden kann, folglich 7 ein Theiler von 10003 iſt. Vergleicht man die ſämtlichen Ueberreſte, jeder um 2 vergröſſert, mit ihren Theilern und Quotienten, ſo findet man ſie nur in denen Stellen commenſurabel, wo ſie Multipla von 7 ſind, und daraus läßt ſich folgern, daß $\frac{10003}{7}$ = 1429 eine Primzahl ſey.

§. 23.

§. 23.

Hätte man hingegen die Zahl 10005 vorgenommen, von welcher man zwar ohnehin ſiehet, daß ſie wenigſtens durch 5 und 3 getheilt werden kann; ſo würden alle Ueberreſte um 4 vergröſſert werden müſſen. Dieſes verwandelt den Ueberreſt 83 in $83 + 4 = 87$, ſo, daß er dem Theiler gleich wird. Demnach läßt ſich 10005 durch 87 theilen. Eben ſo wird der Ueberreſt 111 in $111 + 4 = 115$ verwandelt, und daher dem Quotienten gleich. Daher iſt auch 115 ein Theiler von 10005. Mehr hat man nicht nöthig zu ſuchen, weil $10005 = 87 . 115 = 3 . 5 . 23 . 29$ iſt. Nimmt man eben dieſe Vergleichung mit 10007 vor, in dem man zu jeden Ueberreſten 6 addirt; ſo findet ſich keiner weder mit ſeinem Theiler noch mit dem Quotienten commenſurabel, demnach iſt 10007 eine Primzahl.

Digitized by Google

II.

Vorſchlag
die Theiler der Zahlen in Tabellen zu bringen.

§. 1.

Die vorhergehende Abhandlung enthält zwar einige Methoden, wodurch die Theiler der Zahlen mit leichter Mühe gefunden werden können. Wenn ſich aber auch noch kürzere Methoden finden lieſſen, ſo werden dennoch ſolche Tabellen, worinne die Zahlen bereits in ihre Factoren aufgelöſt ſind, immer angenehm ſeyn, weil ſie weiter nichts als das bloſſe Aufſchlagen fordern. Man hat aus gleichem Grunde unzählige andere Tabellen, z. E. die von Quadrat und Cubiczahlen, die trigonometriſchen und logarithmiſchen, die aſtronomiſchen ꝛc. bey allen war die Bequemlichkeit des Gebrauches ein zureichender Grund, warum man ſich Zeit und Mühe, ſie ein für allemale zu berechnen, nicht hat verdrieſſen laſſen.

§. 2.

Nun hat es zwar an Tabellen, in Abſicht auf die Theiler der Zahlen, eben nicht ganz gefehlt. Sie ſind aber lange nicht ſo bekannt wor-

worden, als ſie es hätten werden ſollen, und es trug ſich ſogar dabey zu, daß ſie mehrmalen ganz von neuem berechnet worden. So z. E. wuſte Poetius, daß dergleichen bereits im vorigen Jahrhundert in England herausgekommen, und 1717 vom Herrn *de Traytorrens d'Yverdun* der Pariſiſchen Akademie ein Project von ſolchen Tabellen übergeben worden. Allein da ihm weiter nichts davon zu Geſichte kam, ſo berechnete er ſie von neuem, und gab ſie, wiewohl etwas abgekürzt, 1728 in ſeiner **Anleitung zur arithmetiſchen Wiſſenſchaft vermittelſt einer parallelen Algebra** heraus. Eben dieſes begegnete dem Peter Jäger mit ſeinen Primzahlen, die Krüger ſeinen **Gedanken über die Algebra** angehenkt. Selbſt Anjema, deſſen **Verzeichnis der Theiler aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000** nach ſeinem Tode 1767 in einem ziemlichen Quartbande zu Leyden herausgekommen, und ſeine Herausgeber ſcheinen von bereits vorhanden geweſenen Tabellen nichts gewuſt zu haben, da in der Vorrede das Werk als das erſte und einige in ſeiner Art angerühmet wird. Solche Erſcheinungen in der gelehrten Welt ſind um deſto merkwürdiger, weil unſtreitig die Tabellen von den Theilern der Zahlen eben ſo gemein ſeyn ſolten, als es die trigonometriſchen und logarithmiſchen ſind. Denn wer dieſe zu gebrauchen weiß, wird ganz gewiß auch jene brauchbar finden.

§. 3.

§. 3.

Es mögen indeſſen verſchiedene Urſachen ſeyn, warum die Tabellen von den Theilern der Zahlen weniger gemein ſind. Sowohl D. Pell in England, als Poetius in Teutſchland haben ſich begnügt, ſie ihren Anleitungen zur Algebra und Rechenkunſt einzuverleiben, anſtatt daß ſie beſonders hätten herausgegeben werden ſollen. Eben ſo finden ſie ſich in dem 2ten Bande des 1742 zu Leipzig herausgekommenen mathematiſchen Lexicons unter ſehr viel andern Tabellen. Anjema war demnach meines Wiſſens der erſte, der ſie vollſtändiger zu machen und beſonders herauszugeben gedachte. Da er aber durch den Todt an der Arbeit gehindert worden, ſo erſtrecken ſich ſeine Tabellen auch nur bis auf 10000. Und es iſt unſtreitig, daß wenn ſie eben ſo vollſtändig bis auf 100000 hätten fortgeſetzt werden ſollen, das Werk zu einem ungeheuren Folianten angewachſen wäre, und vielleicht ſodann keinen Verleger würde gefunden haben.

§. 4.

Es läßt ſich aber ein ſolcher Foliant ganz bequem auf 10 Folioſeiten abkürzen, wenn man ſich mit dem nöthigſten begnügen und auf die ſchicklichſte Einrichtung denken will. Anjema hat ſeine Tafeln dadurch ſehr weitläuftig gemacht, daß er alle Zahlen von 1 bis 10000 mitgenommen, und alle Theiler aufgezeichnet hat.

Digitized by Google

hat. Da es aber überhaupt genug iſt, wenn man die eigentlichen Factoren einer Zahl weiß, weil aus dieſen alle übrige Theiler leicht gefunden werden; ſo ſieht man ohne Mühe, daß dadurch eine beträchtliche Abkürzung der Tafeln erhalten werden kann.

§. 5.

Zu dieſer Abkürzung kömmt noch eine andere, welche man erhält, wenn aus der Tafel alle die Zahlen wegbleiben, die ſich durch 2, 3, oder 5 theilen laſſen. Denn ſolche Zahlen laſſen ſich ohne Mühe erkennen. Und werden ſie, ſo vielmal es angeht, durch 2, 3, 5 getheilt, ſo iſt es immer genug, wenn man aus der Tabelle ſehen kann, ob der letzte Quotient noch ferners in Factoren zerfällt werden kann.

§. 6.

Auf dieſe Art aber werden von 30 Zahlen nur 8 beybehalten, ſo, daß man für 30000 Zahlen nicht mehr Raum gebraucht, als man ſonſt nur für 8000 würde gebraucht haben. Denn da 30 die kleinſte Zahl iſt, die ſich durch 2, 3, 5 theilen läßt, ſo folgt, daß jede Zahl die durch 30 getheilt, entweder 0, oder einen durch 2, 3, 5 thielbaren Reſt übrig läßt, ebenfalls durch 2, 3, 5 getheilt werden kann; und hinwiederum daß auch letzteres nicht angeht, wenn erſteres nicht ſtatt findet. Nun findet dieſes nur in denen Fällen nicht ſtatt, wo eine Zahl, wenn

wenn ſie durch 30 getheilt wird, eine der Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 zum Reſte läßt. Und ſo hat man auch nur unter jeden 30 Zahlen dieſe achterley Fälle beyzubehalten.

§. 7.

Es verurſacht aber die decimale Einrichtung des Zahlengebäudes, daß man anſtatt 30 zum Grunde zu legen, bequemer 300 zum Grunde legt, und daher nur die Zahlen beybehält, welche, wenn ſie durch 300 getheilt werden, eine von folgenden Zahlen

1	31	61	91	121	151	181	211	241	271
7	37	67	97	127	157	187	217	247	277
11	41	71	101	131	161	191	221	251	281
13	43	73	103	133	163	193	223	253	283
17	47	77	107	137	167	197	227	257	287
19	49	79	109	139	169	199	229	259	289
23	53	83	113	143	173	203	233	263	293
29	59	89	119	149	179	209	239	269	299

zum Ueberreſte haben. Dieſe ſind es allein, welche ſich durch 2, 3, 5 nicht theilen laſſen.

§. 8.

Dieſe Ueberreſte zeigen nun ebenfalls an, in welcher Ordnung die beyzubehaltende Zahlen, in Abſicht auf ihre zwo letzte Ziffern, auf einander folgen, weil dieſe Ordnung, ſo oft man um 300 weiter ſchreitet, allemal wiederkehrt. Es wird ſich nun hieraus begreiflich machen laſſen, wie es möglich geweſen, den ganzen Anjema-

ſchen

ſchen Quartband auf die beygefügte Folioſeite abzukürzen.

§. 9.

Denn einmal war es genug, die zwo letzte Ziffern erſt angeführter Ueberreſte (§. 7.) in der vorderſten Columne herunter zu ſchreiben, und an den zwo Stellen, wo ein neues hundert anfängt, einen Zwiſchenraum zu laſſen, in welchem der Queere nach die ganzen hunderte hintereinander, und zwar jedes über ſeine Columne, geſchrieben werden konnten. Dadurch, und wegen des nach den 3000 und 6000 herunterlauffenden Zwiſchenraumes findet ſich die Tabelle in 9 Quadrate eingetheilt, und dadurch erhielt die Tabelle theils eine beſſere Geſtalt, theils auch wurde dadurch das Aufſuchen erleichtert. Man ſieht leicht, daß die Theiler jeder Zahl da zu ſuchen ſind, wo man von den hunderten herunterwärts, und von den Ueberreſten in der erſten Columne des Quadrats, über welchen die hunderter ſtehen, hinterwerts fährt, bis man zuſammen trift.

§. 10.

So z. E. wenn die Zahl 4361 fürgegeben, ſo findet ſich 4300 über der vierten Columne des mittlern Quadrats. Fährt man demnach von 4300 herunterwerts, und von 61 hinterwerts, ſo trift man da zuſammen, wo die Zahlen 7. 7. 89 ſtehen. Und dieſes ſind die Factoren, aus deren Multiplication die Zahl 4361 erwächſt.

§. 11.

Trift es ſich bey ſolchen Aufſuchen, daß man auf eine leere Stelle kömmt, ſo iſt dieſes eine Anzeige, daß die aufgeſuchte Zahl eine Primzahl iſt. So z. E. wenn man 4363 aufgeſucht hätte, ſo würde man auf die leere Stelle gefallen ſeyn, welche unmittelbar unter den für 4361 gefundenen Factoren 7. 7. 81 ſteht.

§. 12.

Trift man aber eine Zahl bey dem Aufſuchen gar nicht an; ſo kann man ſchlieſſen, daß ſie durch 2, 3 oder 5 getheilt werden kann. So z. E. wenn man (um bey gleicher Columne zu bleiben) die Zahl 4371 hätte aufſuchen wollen, ſo würde man in der Columne der Ueberreſte die zwo letzten Ziffern 71 nicht gefunden haben. Da nun 4371 weder gerade iſt, noch zur letzten Ziffer eine 0 oder 5 hat, ſo bleibt nur, daß ſie durch 3 getheilt werden kann. Nimmt man die Theilung vor; ſo erhält man den Quotient 1457, welcher unter 1400 und hinter 57 aufgeſucht, auf die Factoren 31, 47 verweiſet, ſo, daß demnach die Factoren der Zahl 4371 die Zahlen 3, 31, 47 ſind.

§. 13.

Da nun die Tabelle ſich bis auf 10199 oder 10200 erſtreckt, ſo ſieht man, daß man dadurch die Theiler der Zahlen von 1 bis auf 10200 nebſt den Primzahlen auf eine ſehr geſchmei-

Digitized by Google

geſchmeidige Art beyſammen hat, und ſie gleichſam mit einem Anblicke überſehen kann. Auch hat man bey dem Aufſuchen nicht nöthig lange zu blättern, weil ſowohl die hunderter als die zwo letzte Ziffern jeder fürgegebenen Zahl gleich in die Augen fallen.

§. 14.

Ungeachtet ſich nun die Tabelle nur bis auf 10200 erſtreckt, ſo dient ſie doch auch für gröſſere Zahlen, die, wenn ſie durch 2, 3, 5 können getheilt werden, ſich ſo weit herunter bringen laſſen, daß der letzte Quotient kleiner als 10200 iſt. Da dieſes aber nicht mit jeden gröſſern Zahlen angeht, ſo werde ich auch den Vortheil nicht mehr erheben, als er es verdient.

§. 15.

Vielmehr werde ich anmerken, daß ich die Tabelle vorzüglich deswegen durch den Druck bekannt mache, daß etwann jemand durch die ſo geſchmeidige Einrichtung derſelben ſich bewegen laſſe, noch 9 andere, oder wenn er ſich einen recht unſterblichen Namen machen will, noch 99 andere beyzufügen. Denn ſo würde man im letztern Fall, auf die geſchmeidigſte Art, die nur immer möglich iſt, die Theiler jeder Zahlen haben die unter einer Million, oder unter 1020000 ſind, und das wäre doch immer genug. Im erſtern Fall hätte man ſie bis auf 102000, und man würde immer 10 mal weiter

damit reichen, als mit der gegenwärtigen, die nur bis auf 10200 geht.

§. 16.

Da es aber ſchwerlich zu hoffen ſteht, daß zu dieſer Tabelle noch 99 andere hinzugerechnet werden, wiewohl die Arbeit weder ſo groß, noch ſo weitläuftig ſeyn würde, als ſie es bey den trigonometriſchen Tafeln war, ſo werde ich es bey den 102000 bewenden laſſen, und nun noch angeben, wie die Berechnung merklich erleichtert werden könne.

§. 17.

Die Quadratwurzel von 102000 iſt etwas weniger als 320, demnach wenn eine Zahl, die kleiner als 102000 iſt Theiler hat, ſo hat ſie nothwendig einen Theiler der kleiner als 320 iſt.

§. 18.

Da ferners die durch 2, 3, 5 theilbare Zahlen wegbleiben, ſo iſt 7 die kleinſte Primzahl die unter den Factoren vorkömmt. Theilt man demnach 102000 durch 7, ſo iſt der Quotient 14571. Und ſo iſt es zu Verfertigung der Tabelle genug, wenn man die Primzahlen bis auf 14571 weiß. Denn gröſſere kommen unter den Factoren nicht vor, wenn die Tabelle nur bis auf 102000 fortgeſetzt wird.

§. 19.

Digitized by Google

§. 19.

Theilt man ferners 10200 durch 7, ſo iſt der Quotient 1457. Und hieraus folgt, daß alle durch 2, 3, 5 nicht theilbare Zahlen, die zwiſchen 1457 und 14571 fallen, durch 7 müſſen multiplicirt werden. Dieſe Zahlen wären nun ſämtlich in der Tafel enthalten, wenn ſie bereits bis auf 14571 fortgeſetzt wäre. Da ſie ſich nun vorerſt auf eben die Art bis dahin fortſetzen läßt, wie ſie ſodann bis auf 102000 fortgeſetzt wird; ſo werde ich annehmen, daß ſie bereits bis auf 14571 fortgeſetzt ſey. Denn ſo wie ſie iſt, läßt ſie ſich bis auf 7 mal 10200, oder 71400, und von da an bis auf 71400 mal 7, oder 499800 fortſetzen.

§. 20.

Nun iſt vor allen Dingen nöthig, daß, ſo weit man die Tafel fortſetzen will, man die Eintheilung in Quadrate und Columnen gleich anfangs mache, und die hunderter und die zwo letzte Ziffern auf eben die Art, wie in der hier vorgelegten Tabelle hinſchreibe, damit ſodann die Factoren ſogleich können an ihren Ort eingetragen werden.

§. 21.

So z. E. um die Columne von 40000 bis 40100 auszufüllen, werden die in der Tafel vorkommende Zahlen von 7 an bis zu der Quadratwurzel von 40100 gebraucht. Man theilt

40000 durch 7, ſo iſt der Quotient $5714\frac{2}{7}$. Die nächſt gröſſere Zahlen in der Tafel ſind nebſt ihren Factoren

5717
5719 = 7. 19. 43
5723 = 59. 97
5729 = 17. 337 ꝛc.

dieſe mit 7 multiplicirt, geben nun

40019 = 7. 5717
40033 = 7. 7. 19. 43
40061 = 7. 59. 97
40103 = 7. 17. 337 ꝛc.

An die Stelle von dieſen Producten werden nun die neben denſelben ſtehenden Factoren eingetragen. Sodann verfährt man eben ſo mit 11 als der nächſt gröſſern Zahl. Denn 40000 durch 11 getheilt, giebt $3636\frac{4}{11}$. Die nächſt gröſſere Zahlen in der Tafel ſind nebſt ihren Factoren

3637
3641 = 11. 331
3643
3647 = 7. 521 ꝛc.

dieſe durch 11 multiplicirt, geben

40007 = 11. 3637
40051 = 11. 11. 331
40073 = 11. 3643
40117 = 7. 11. 521 ꝛc.

Eben ſo verfährt man auch mit 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 ꝛc. das will ſagen,

Digitized by Google

Digitized by Google

ſagen, mit allen Primzahlen bis zu der Quadratwurzel von 40100, wenn man nemlich nur bis auf dieſe Zahl die Tafel ausfüllen will. Man füllt ſie aber, wie vorhin geſagt, entweder nur bis auf 14571, oder auch gar bis auf 71400, und ſodann vollends bis auf 102000 aus. Die Stellen, die zuletzt unausgefüllt bleiben, ſind die von Primzahlen.

§. 22.

Auf die erſt beſchriebene Art habe ich die Tafel von 10000 bis auf 10200 ausgefüllt, nachdem ich das übrige aus des *Poëtii* anatomia numerorum genommen, und zugleich in die 20 Druck- und Rechenfehler verbeſſert, die ich wegen der Einrichtung der hier beygefügten Tafel, leicht entdecken konnte.

III.
Verwandlung der Brüche.

§. 1.

Man trägt gemeiniglich die Brüche ſo vor, daß ſowohl der Zähler als der Nenner ganze Zahlen ſind, weil dieſes die eigentliche Abſicht der Brüche iſt, daß man die Verhältniß des Theils zum Ganzen durch die Verhältniß zwoer ganzer Zahlen vorſtelle. Der Nenner zeigt an, in wie viele Theile man das Ganze theilen müſſe, und der Zähler drücket die Anzahl ſolcher Theile aus, die man zu nehmen hat. Indeſſen kann es auch Fälle geben, wo der Nenner oder der Zähler, oder beyde zugleich ebenfalls wiederum Brüche haben, und ſolche kann man ſehr gut gebrauchen, weil ſie zu beſondern Abſichten dienen, denen zu gefallen man auch öfters ganz reine Brüche in ſolche verwandelt, deren Nenner ſelbſt wiederum mit Brüchen behaftet ſind.

§. 2.

Nun kommen zwar die Regeln, ſo man bey ſolchen Verwandlungen zu beobachten hat, bereits in verſchiedenen Schriften der Mathematicker vor. Da ſie aber theils noch häufiger und ſelbſt in den gemeinen Anweiſungen zur Rechen-

Rechenkunſt vorkommen ſolten, theils auch verſchiedenes dabey nachzuholen iſt; ſo werde ich den meiſten Leſern einen Gefallen erweiſen, wenn ich mich hier ſowohl bey den Regeln als bey deren Gebrauch ein wenig aufhalte.

§. 3.

Man habe z. E. 3 durch $5\frac{1}{7}$ zu theilen, ſo kann dieſes in Form eines Bruches geſchrieben werden, welcher

$$\frac{3}{5\frac{1}{7}} \quad \text{oder} \quad \frac{3}{5+\frac{1}{7}}$$

ſeyn wird. Dieſer Bruch läßt ſich nun leicht in einen reinen Bruch verwandeln, wenn man Nenner und Zähler mit 7 multiplicirt. Denn ſo iſt $7 \cdot 3 = 21$, und $7 \cdot 5\frac{1}{7} = 36$, folglich

$$\frac{3}{5+\frac{1}{7}} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

§. 4.

Hinwiederum wenn man z. E. $\frac{7}{30}$ vor ſich hat, ſo kann man Zähler und Nenner durch 7 theilen, und da erhält man

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{4+\frac{2}{7}}.$$

welches anzeigt, daß $\frac{7}{30}$ etwas kleiner als $\frac{1}{4}$ ſey. Nun läßt ſich $\frac{2}{7}$, wenn Zähler und Nenner durch 2 getheilt werden, ebenfalls in

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

verwandeln, und ſo erhält man

$$\frac{7}{30} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

welches anzeigt, daß $\frac{7}{30}$ etwas weniges gröſſer als $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ oder $\frac{2}{9}$ iſt. (§. 3.)

§. 5.

Man habe nun z. E. $\frac{216}{1147}$, ſo theilt man erſtlich Zähler und Nenner durch 216, und dieſes giebt

$$\frac{216}{1174} \qquad \frac{1}{5 + \frac{67}{216}}$$

auf eine ähnliche Art erhält man

$$\frac{67}{216} = \frac{1}{3 + \frac{15}{67}} = \frac{1}{3 + a}$$

$$a = \frac{15}{67} = \frac{1}{4 + \frac{7}{15}} = \frac{1}{4 + b}$$

$$b = \frac{7}{15} = \frac{1}{2 + \frac{1}{7}} = \frac{1}{2 + c}$$

Da man nun nach dieſer vierten Theilung auf $\frac{1}{7}$ verfällt, ſo iſt man mit der Auflöſung des Bruchs fertig, und man findet, wenn man der Ordnung nach ſubſtituirt,

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}}}$$

Dieſes will nun ſagen, der Bruch $\frac{216}{1147}$ ſey etwas kleiner als $\frac{1}{5}$, etwas weniges gröſſer als $\frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{3}{16}$, etwas noch wenigeres kleiner als

$$\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = \cfrac{1}{5 + \frac{4}{13}} = \frac{13}{69}$$

etwas noch wenigeres gröſſer als

$$\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{2}}}} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \frac{2}{9}}} = \cfrac{1}{5 + \frac{9}{29}} = \frac{29}{154}$$

und genaue gleich $\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}}}$.

§. 6.

Hiebey kommen nun zwo Fragen vor: Einmal, wie man die ganze Rechnung nach einer gewiſſen Ordnung einrichten, und die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{13}{69}$, $\frac{29}{154}$, als welche dem fürgegebenen Bruche $\frac{216}{1147}$ immer näher kommen, leichte finden könne? Sodann wie man eben ſo leichte finden könne, um wie viel ſie von dem fürgegebenen Bruche $\frac{216}{1147}$ verſchieden ſind, damit man allenfalls des Unterſchiedes Rechnung tragen könne?

§. 7.

Man ſetze erſtlich

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + a}}$$

wobey $a = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}$

iſt, ſo darf man nur Zähler und Nenner mit $3 + a$ multipliciren, und ſo erhält man

$$\frac{216}{1147} = \frac{3 + a}{16 + 5a}.$$

Ferner

Ferner ſetze man $a = \frac{1}{4+b}$

wobey folglich $b = \frac{1}{2+\frac{1}{7}}$ iſt, ſo erhält man

$$\frac{216}{1147} = \frac{3+\frac{1}{4+b}}{16+\frac{5}{4+b}}$$

und folglich, wenn Nenner und Zähler mit $4+b$ multiplicirt wird

$$\frac{216}{1147} = \frac{13+3b}{69+16b}.$$

Setzt man nun wiederum $b = \frac{1}{2+c}$

ſo iſt $c = \frac{1}{7}$, und man erhält

$$\frac{216}{1147} = \frac{13+\frac{3}{2+c}}{69+\frac{16}{2+c}} = \frac{29+13c}{154+69c}.$$

Endlich da $c = \frac{1}{7}$ iſt, ſo wird

$$\frac{216}{1147} = \frac{29+\frac{13}{7}}{154+\frac{69}{7}} = \frac{216}{1147}$$

welches wiederum den fürgegebenen Bruch giebt.

§. 8.

§. 8.

Dieſes Verfahren zeiget nun an, wie die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{13}{69}$, $\frac{29}{154}$ aus den Theilern 5, 3, 4, 2, 7 entſpringen. Denn ſo iſt

$$1.\ 3 = 3 \qquad 5.3 + 1 = 16$$
$$3.4 + 1 = 13 \qquad 16.4 + 3 = 69$$
$$13.2 + 3 = 29 \qquad 69.2 + 16 = 154$$
$$29.7 + 13 = 216 \qquad 154.7 + 69 = 1147.$$

Man darf nemlich in den gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a}, \frac{13+3b}{69+16b}, \frac{29+13c}{154+69c}$$

nur $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{7}$ ſetzen, um die abſolute Zahlen des folgenden Bruches zu erhalten. Denn ſo iſt

$$\frac{3+\frac{1}{4}}{16+\frac{5}{4}} = \frac{13}{69}, \text{ und } \frac{13+\frac{3}{2}}{69+\frac{16}{2}} = \frac{29}{154}$$

$$\text{und } \frac{29+\frac{13}{7}}{154+\frac{69}{7}} = \frac{216}{1147}.$$

§. 9.

Wenn wir nun die ganze Rechnung in ihre einfachſte Ordnung bringen, ſo läßt ſie ſich folgender geſtalt vorſtellen. Erſtlich dividiret man jeden Theiler durch ſeinen Ueberreſt. Demnach nun bey eben dem Beyſpiele zu bleiben

216

216	1147	5
	1080	
	67	216 | 3
		201
		15 | 67 | 4
		60
		7 | 15 | 2
		14
		1 | 7 | 7.
		7
		0

Mit dieſen Theilern, Ueberreſten und Quotienten macht man ſodann folgende Figur

1147		1	0
216	5	0	1
67	3	1	5
15	4	3	16
7	2	13	69
1	7	29	154
		216	1147

Man ſchreibt nemlich in der erſten Columne die Theiler und Ueberreſte, in der zweyten die Quotienten, in der dritten zeichnet man 1, 0, und in der vierten 0, 1. Die übrigen Zahlen dieſer beyden Columnen ergeben ſich ſodann, indem man

$5 \cdot 0 + 1 = 1$ und $5 \cdot 1 + 0 = 5$
$3 \cdot 1 + 0 = 3$ $3 \cdot 5 + 1 = 16$
$4 \cdot 3 + 1 = 13$ $4 \cdot 16 + 5 = 69$
$2 \cdot 13 + 3 = 29$ $2 \cdot 69 + 16 = 154$
$7 \cdot 29 + 13 = 216$ $7 \cdot 154 + 69 = 1147$

macht,

macht, das will ſagen, jede Zahl der dritten und vierten Columne mit dem nebenſtehenden Quotienten der zweyten Columne multiplicirt, und zu dem Producte die nächſt über derſelben ſtehenden Zahl addirt. Nun geben die Zahlen der beyden letzten Columnen die Brüche

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}, \frac{216}{1147},$$

welche wechſelsweiſe gröſſer und kleiner ſind als der letzte, wovon aber je der folgende weniger verſchieden iſt.

§ 10.

Das bisher geſagte, kömmt bereits in mehren Schriften der Mathematicker vor, und dient überhaupt dahin, daß man einen durch gröſſere Zahlen ausgedrückten Bruch, der ſich nicht genau auf kleinere Zahlen bringen läßt, dergeſtalt auf kleinere Zahlen bringe, daß er durch keine kleinere genauer getroffen wird. Da man auf dieſe Art mehrentheils eine ganze Reyhe von Brüchen findet, wovon je der folgende genauer, dabey aber durch gröſſere Zahlen ausgedrückt iſt; ſo behält man dabey die Wahl, zu beſtimmen, ob man ſich mit einem kleinern begnügen könne, oder einen durch gröſſere Zahlen ausgedruckten dafür nehmen wolte. In phyſiſchen und practiſchen Dingen fällt dieſes deſto bequemer, weil man da ohnehin an keine geometriſche Schärfe gedencken kann.

§. 11.

§. 11.

Man iſt aber, ſo viel ich weiß, bey der Erfindung ſolcher Brüche ſtehen geblieben, ohne zu ſehen, ob nicht durch eben das Verfahren, die Genauigkeit eines jeden beſtimmt werden könnte? Die natürlichſte Probe, die ſich hierüber anſtellen läßt, und die uns zugleich auf die Spuhr führen wird, iſt, daß man nach der gewöhnlichen Art die Brüche zu ſubtrahiren, dieſe Subtraction vornehme. Denn ſo findet man

$$\frac{1}{5} - \frac{216}{1147} = \frac{1147 - 1080}{5 \cdot 1147} = \frac{67}{5 \cdot 1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{3}{16} = \frac{15}{16 \cdot 1147}$$

$$\frac{13}{69} - \frac{216}{1147} = \frac{7}{69 \cdot 1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{29}{154} = \frac{1}{154 \cdot 1147}.$$

Und hieraus ſieht man, daß die Zähler dieſer Brüche 67, 15, 7, 1 der Ordnung nach die Ueberreſte der erſten Columne, die Nenner aber das Product aus dem Nenner eines jeden Bruches und dem Nenner 1147 des fürgegebenen Bruches ſind. Auf dieſe Art wird demnach der fürgegebene Bruch in zween aufgelöſt, und es iſt

$$\frac{216}{1147} = \frac{1}{5} - \frac{76}{5 \cdot 1147} = \frac{3}{16} + \frac{15}{16 \cdot 1147} = \frac{13}{69} - \frac{7}{69 \cdot 1147}$$

$$= \frac{29}{153} + \frac{1}{154 \cdot 1147} = \frac{216}{1147} + 0.$$

§. 12.

§. 12.

Um nun überhaupt einzuſehen, wie dieſe Ueberreſte der erſten Columne hier zum Vorſchein kommen, dörfen wir nur anſtatt die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{13}{69}$, $\frac{29}{154}$ von dem Bruche $\frac{216}{1147}$ abzuziehen, dieſelben von den vorhin (§. 7.) gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a},\ \frac{13+3b}{69+16b},\ \frac{29+13c}{154+69c}$$

abziehen. Denn dieſe ſtellen ſämtlich den Bruch $\frac{216}{1147}$ vor, und es iſt aus dem (§. 5.) zu ſehen, daß die Buchſtaben a, b, c durch die Ueberreſte 67, 15, 7 beſtimmt werden. Auf dieſe Art haben wir demnach

$$+\frac{3+a}{16+5a}-\frac{3}{16}=\frac{a}{16(16+5a)}=\frac{15:67}{16(16+5.\frac{15}{67})}$$

$$=\frac{15}{16.\ 1147}$$

$$-\frac{13+3b}{69+16b}+\frac{13}{69}=\frac{b}{69(69+16b)}=\frac{7:16}{69(69+16.\frac{7}{16})}$$

$$=\frac{7}{69.\ 1147}$$

$$\frac{29+13c}{154+69c}-\frac{29}{154}=\frac{c}{154(154+69c)}$$

$$=\frac{1:7}{154(154+\frac{69}{7})}=\frac{1}{154.\ 1147.}$$

Und hieraus ſieht man, wie die Ueberreſte der erſten Columne zu Nennern werden.

§. 13.

§. 13.

Wenn man die Brüche

$$\frac{1}{5},\ \frac{3}{16},\ \frac{13}{69},\ \frac{29}{154},\ \frac{216}{1147}$$

umkehrt, und ſtatt derſelben

$$\frac{5}{1},\ \frac{16}{3},\ \frac{69}{13},\ \frac{154}{29},\ \frac{1147}{216}$$

nimmt, ſo findet man auf eine ganz ähnliche Art

$$\frac{1147}{216} = \frac{5}{1} + \frac{67}{1.\ 216} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3.\ 216} = \frac{69}{13} + \frac{7}{13.260}$$

$$= \frac{154}{29} - \frac{1}{29.\ 216} = \frac{1147}{216} + 0,$$ wo ebenfalls die Ueberreſte 67, 15, 7, 1 als Zähler erſcheinen.

§. 14.

Wir haben bisher das ganze Verfahren, in Form eines Beyſpieles vorgetragen, doch ſo, daß ſich der Grund deſſelben zugleich mit einſehen läßt. Berechnet man auf dieſe Art noch mehrere Beyſpiele, ſo wird man leicht finden, daß man bald mehr, bald minder Diviſionen vorzunehmen hat, bis der Bruch ganz aufgelöſt iſt. Wir wollen, um den Unterſchied zu zeigen, die Figur von zwey andern Beyſpielen herſtellen, welche die Brüche

$$\frac{61}{97} \text{ und } \frac{231}{257}$$

betreffen. Es iſt folglich

97		1	0	257		1	0
61	1 —	0	1	231	1 —	0	1
36	1 —	1	1	26	8 —	1	1
25	1 —	1	2	23	1 —	8	9
11	2 —	2	3	3	7 —	9	10
3	3 —	5	8	2	1 —	71	79
2	1 —	17	27	1	2 —	80	89
1	2	22	35			231	257
		61	97				

und daher für das erſte Beyſpiel

$$\frac{61}{97}=\frac{1}{1}-\frac{36}{1.97}=\frac{1}{2}+\frac{25}{2.97}=\frac{2}{3}-\frac{11}{3.97}$$
$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8.97}=\frac{17}{27}-\frac{2}{27.97}=\frac{22}{35}+\frac{1}{35.97}$$
$$=\frac{61}{97}-0,$$

oder umgekehrt

$$\frac{97}{61}=\frac{1}{1}+\frac{36}{1.61}=\frac{2}{1}-\frac{25}{1.61}=\frac{3}{2}+\frac{11}{2.61}$$
$$=\frac{8}{5}-\frac{3}{5.61}=\frac{27}{17}+\frac{2}{17.61}=\frac{35}{22}-\frac{1}{22.61}$$
$$=\frac{97}{61}+0.$$

Für das andere Beyſpiel

$$\frac{231}{257}=\frac{1}{1}-\frac{26}{1.257}=\frac{8}{9}+\frac{23}{9.257}=\frac{9}{10}-\frac{3}{10.257}$$
$$=\frac{71}{79}+\frac{2}{79.257}=\frac{80}{89}-\frac{1}{89.259}=\frac{231}{257}+0,$$

oder umgekehrt $\frac{257}{231}$

$$\frac{257}{231} = \frac{1}{1} + \frac{26}{1.231} = \frac{9}{8} - \frac{23}{8.231} = \frac{10}{9} + \frac{3}{9.231}$$

$$= \frac{79}{71} - \frac{2}{71.257} = \frac{89}{80} + \frac{1}{80.231} = \frac{257}{231} - 0.$$

§. 15.

Es iſt aber eben dieſe immer verſchiedene Anzahl der vorzunehmenden Diviſionen, welche den algemeinen Beweis ſchwerer macht, weil man dabey genöthiget wird, Glied für Glied zu beweiſen, und die Anzahl der Diviſionen unbeſtimmt laſſen muß. Wir werden dieſen Beweis folgendergeſtalt vortragen: Es ſey die allgemeine Figur

A	———	1	0
B	a ———	0	1
C	b ———	1	a
D	c ———	b	ab + 1
E	d ———	bc + 1	abc + c + a
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.
- -	- - - - -	- -	- - - - -
O	———	x	v
P	q	y	w
Q		qy + x	qw + v

ſo iſt überhaupt $Pq + Q = O$, weil O durch P dividirt q giebt, und Q übrig läßt. Nun iſt zu beweiſen, daß, was von den Brüchen $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{w}$ gilt, auch von dem folgenden und daraus formirten Bruche $\frac{qy + x}{qw + v}$ gelte, oder, daß wenn

erſtere beyde die Gleichungen

$$+\frac{x}{v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm O}{Av}$$

$$-\frac{y}{w}+\frac{B}{A}=\frac{\pm P}{Aw}$$

geben, der dritte auf eben die Art die Gleichung

$$+\frac{qy+x}{qw+v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}$$

geben werden. Um dieſes zu beweiſen, haben wir weiter nichts zu thun, als die in dieſen Gleichungen angezeigte Subtractionen vorzunehmen. Denn ſo verwandeln ſich die beyden erſtern in

$$\frac{Ax-Bv}{vA}=\frac{\pm O}{Av}$$

$$-\frac{Ay+Bw}{wA}=\frac{\pm P}{Aw}$$

Und hieraus folgt, daß

$$\pm O=+Ax-Bv$$

$$\pm P=-Ay+Bw$$

iſt. Nun aber iſt

$$\pm Q=O-Pq$$

demnach, wenn man die für O und P gefundene Werthe ſetzt,

$$\pm Q=Ax-Bv+Ayq-Bwq.$$

Eben dieſes folgt aber auch aus der dritten Gleichung

$$\frac{qy+x}{qw+v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}.$$

Denn

Denn wird die Subtraction vorgenommen, ſo erhält man

$$\frac{qyA + Ax - qwB - vB}{A(qw+v)} = \frac{\pm Q}{A(qw+v)}$$

demnach, mit Weglaſſung der Nenner

$$\pm Q = Ax - Bv + qyA - qwB,$$

welches eben die Gleichung iſt, die aus denen beyden erſtern folgte, und demnach das, was wir zu beweiſen hatten, an Tag legt. Wir haben demnach nur noch zu zeigen, daß dieſe beyden Gleichungen von den 2 erſten Gliedern der Figur

A	——	——	——
B	a ——	o	1
C	b ——	1	a

gelten, denn ſo werden ſie auch von dem dritten, demnach von dem vierten, und jeden folgenden wahr ſeyn. Zu dieſem Ende haben wir nur

$P = B$	$q = a$	$x = o$	$v = 1$
$Q = C$		$y = 1$	$w = a$

zu ſetzen, ſo werden die Gleichungen

$$\pm O = + Ax - Bv$$
$$\pm P = - Ay + Bw$$

in folgende

$$\pm B = + A.o - B.1 = - B$$
$$\pm C = - A.1 + B.a$$

verwandelt. Erſtere iſt für ſich klar, letztere wird dadurch als richtig erkannt, weil A durch

B dividiret, a giebt, und C übrig läßt, demnach

$$C = A - Ba$$

iſt. Wir haben demnach

$$\frac{B}{A} = \frac{o}{1} + \frac{B}{A}$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{C}{A(a)}$$

$$= \frac{b}{ab+1} + \frac{D}{A(ab+1)}$$

$$= \frac{bc+1}{abc+c+a} - \frac{E}{A(abc+c+a)}$$

$$= \&c.$$

$$= \frac{x}{v} \pm \frac{O}{Av}$$

$$= \frac{y}{w} \mp \frac{P}{Aw}$$

$$= \frac{qy+x}{qw+v} \pm \frac{Q}{A(qw+v)}$$

&c.

Nun ſind die Zähler B, C, D, E &c. O, P, Q der Ordnung nach kleiner, weil der letzte $= O$ wird; hingegen aber die Nenner A, Aa, A(ab+1) &c. der Ordnung nach gröſſer, weil a, b, c &c. poſitiv und ganze Zahlen, demnach entweder $= 1$, und mehrentheils gröſſer als 1 ſind. Da folglich die Brüche $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{Aa}$, $\frac{D}{A(ab+1)}$ &c. ſehr merklich kleiner, und zuletzt $= 0$ werden, ſo ſind auch die

Brü-

Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{b}{ab+1}$, $\frac{bc+1}{abc+c+a}$ &c. von dem fürgegebenen $\frac{B}{A}$ der Ordnung nach weniger, und der letzte gar nicht davon verſchieden.

§. 16.

Wenn ein Bruch ſich in der That durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt, ſo erhält man nach dieſem Verfahren nicht nur den verkleinerten Bruch genau, ſondern auch noch alle noch kleinere, die von demſelben am wenigſten verſchieden ſind. Man habe z. E. $\frac{189}{301}$, ſo iſt

301		1	0
189	1	0	1
112	1	1	1
77	1	1	2
35	2	2	3
7	5	5	8
		27	43

Demnach iſt

$$\frac{189}{301} = \frac{27}{43} = \frac{1}{2} + \frac{77}{2.301} = \frac{2}{3} - \frac{35}{3.301} = \frac{5}{8} + \frac{7}{8.301}$$

oder $= \frac{1}{2} + \frac{11}{2.43} = \frac{2}{3} - \frac{5}{3.43} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8.43}$.

§. 17.

Man ſieht ferners auch leicht, daß beſonders Decimalreyhen auf dieſe Art in Brüche verwandelt werden können, die ſie ſo genau, als man es verlangt, vorſtellen. Doch da man ſolche Reyhen nicht ſo unendlich, wie ſie ſind, in die Rechnung ziehen kann, ſo nimmt man auch nur ſo viele Ziffern, als es nöthig iſt. Indeſſen kann man derer, ſo man wegläßt, dennoch in Rechnung tragen, damit man das Dividiren eben nicht weiter verfolge als es nöthig iſt. Und dabey hat man auf zweyerley Umſtände zu merken: Einmal findet man früher den Bruch, welcher die Decimalreihe, ſo weit man ſie verlangt, vorſtellt. Sodann häuft ſich bey dem fortgeſetzten Dividiren der Fehler, der aus dem weggelaſſenen Theile der Decimalreihe entſteht, und dieſes kann machen, daß man zuletzt ganz andere Zahlen heraus bringt, als die, ſo man heraus bringen würde, wenn man die Reihe ganz in die Rechnung ziehen würde. Wir wollen beydes durch ein Beyſpiel erläutern. Es ſey das Verhältniß der Seite eines Quadrates zu der Diagonale deſſelben durch Brüche auszudrücken, welche daſſelbe ſehr genaue, oder beynahe ganz richtig ausdrücken. Nun weiß man, daß, wenn die Seite $= 1$ iſt, die Diagonale $= \sqrt{2} = 1,41421355530202722\ldots$ iſt. Wir wollen uns hier mit den 7 erſten Decimalzahlen 1, 4142135 begnügen, und den Ueberreſt $= a$ ſetzen; demnach iſt

1,

1,4142135 + a			1	0
1,0000000		1	0	1
,4142135 + a		2	1	1
1715730 —	2 a	2	2	3
710675 +	5 a	2	5	7
294380 —	12 a	2	12	17
121915 +	29 a	2	29	41
50550 —	70 a	2	70	99
20815 +	169 a	2	169	239
8920 —	408 a	2	408	577
2975 +	985 a	2	985	1393
2970 —	2378 a			

Man ſieht hieraus, daß der von dem Ueberreſt a herrührende Unterſchied anfängt beträchtlich groß zu werden, und daß man folglich, ohne mehrere Ziffern mitzunehmen, die Diviſion nicht weiter fortſetzen müſſe. Da nun

$$\frac{17}{12} = 1,4166\ldots.$$

$$\frac{41}{29} = 1,41379\ldots.$$

$$\frac{99}{70} = 1,41428\ldots.$$

$$\frac{239}{169} = 1,414207\ldots.$$

$$\frac{577}{408} = 1,414215$$

$$\frac{1393}{985} = 1,4142132$$

iſt, ſo ſieht man hieraus, daß, wenn man bey

Digitized by Google

den 7 angenommenen Decimalziffern bleiben will, der letzte Bruch eben ſo weit reicht, und daher auch aus dieſem Grunde das fernere Dividiren überflüßig wird.

§. 18.

Um noch ein Beyſpiel anzuführen, welches nicht ſo regulär iſt, wie das erſt angebrachte; ſo ſetzen wir, der Mond durchlaufe den Thierkreis in 27 T. 7 St. 43 M. $5''$, $2'''$, $58\frac{1}{2}^{IV}$. Dieſes giebt in Decimaltheilen 27, 32158601 Tage. Um nun zu ſehen, wie ſich dieſe Zahl zu ganzen Tagen verhalte, ſo iſt

27, 32158601 + a	1	0
1, 00000000	27 — 0	1
32158601 + a	3 — 1	27
3524197 — 3 a	9 — 3	82
440828 + 28 a	7 — 28	765
438401 — 199 a	1 — 199	5437
12427 + 227 a	35 — 227	6202.
3456		

Weiter iſt nun die Diviſion nicht fortzuſetzen, weil ſich der von a herrührende Unterſchied zu ſehr aufhäufen, und die Quotienten unrichtig machen würde. Nehmen wir demnach den letzten Bruch $\frac{6202}{227}$, ſo will dieſer ſagen, daß in 6202 Tagen der Mond 227 mal den Thierkreis durchlaufe, und dieſes iſt nun ſehr genaue. Denn wird 6202 durch 227 getheilt, ſo findet man

man 27 T. 7 St. 43 M. 5''. 1'''. 19'''', welches von der wahren Zeit kaum um $1\frac{2}{3}$ Tertien verſchieden iſt, und folglich für die 6202 Tage kaum $6\frac{1}{3}$ Secunden Unterſchied giebt. Hingegen giebt der Bruch $\frac{765}{28}$ die Zeit von 27 T. 7 St. 42 M. $51\frac{1}{2}$ Sec. welche um $13\frac{3}{5}$ Secunden zu klein iſt. Dieſer Unterſchied iſt beträchtlicher als der vorhergehende; indeſſen iſt er für einen Uhrmacher, der den Mondlauf durch Räderwerke vorſtellen wolte, unerheblich genug, um ſo mehr, da der Bruch $\frac{765}{28}$, welcher $= \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}{4 \cdot 7}$ iſt, durch dieſe ſchickliche Zerfällung der Zahlen, zu der Eintheilung der Räder ſehr bequem iſt, und weil man die Uhr erſt nach etwann 5 Umlaufszeiten des Mondes um 1 Minute zu verrücken hat.

§. 19.

Man kann auf eine ganz ähnliche Art algebraiſche Ausdrücke, und beſonders unendliche Reihen in Brüche verwandeln, ungeachtet ſich dabey nicht immer die Schicklichkeit einfindet, daß ſolche Brüche dem wahren Werthe geſchwinde näher kämen. Ich werde indeſſen die zwey Beyſpiele herſetzen, mit denen ich hierüber eine Probe angeſtellt habe. Das erſte betrift die Logarithmen. Denn da iſt
$\log. (1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \text{etc.}$

Wird

Wird dieſe Reihe in 1 getheilt, ſo iſt der Quotient $= \frac{1}{z}$, der Ueberreſt $= + \frac{1}{2} z - \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{4} z^3 -$ ꝛc. Theilt man durch dieſen die Reihe $z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 -$ ꝛc. ſo iſt der Quotient $= 2$, der Ueberreſt $= \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{6} z^3 + \frac{3}{20} z^4$ ꝛc. Wird durch dieſen zweyten Ueberreſt der erſte $\frac{1}{2} z - \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{4} z^3 -$ ꝛc. getheilt, ſo iſt der Quotient $= \frac{3}{z}$, der Ueberreſt $= \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{5} z^3 +$ ꝛc. Theilt man durch dieſen dritten Ueberreſt den zweyten, ſo iſt der Quotient $= 1$, der vierte Ueberreſt $= \frac{1}{30} z^3 -$ ꝛc. wodurch man wiederum den dritten theilt, und dadurch $\frac{5}{z}$ zum Quotienten erhält. Fährt man auf dieſe Art fort, ſo wird man der Ordnung nach die Quotienten $\frac{1}{z}, 2, \frac{3}{z}, 1, \frac{5}{z}, \frac{2}{3}, \frac{7}{z}$ ꝛc. erhalten, und dieſe geben ſodann

$$\log.(1+z) = \cfrac{1}{1:z + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3:z + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5:z + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{7:z + \cfrac{1}{\text{ꝛc.}}}}}}}}}$$

Es ſey z. E. $z = \frac{1}{5}$, ſo iſt

log.

$$\log.\tfrac{6}{5} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{2:3+\cfrac{1}{35+ \text{2c.}}}}}}}}$$

Dieſes giebt demnach

	1	0
5	0	1
2	1	5
15	2	11
1	31	170
25	33	181
2:3	856	4695
35	$603\frac{2}{3}$	3311
2c.	$21984\frac{1}{3}$	120580

Nun iſt

$$1:5 = 0,20 \ldots\ldots$$
$$2:11 = 0,1818 \ldots\ldots$$
$$31:170 = 0,18235 \ldots\ldots$$
$$33:181 = 0,1823204 \ldots$$
$$856:4695 = 0,18232161 \ldots$$
$$603\tfrac{2}{3}:3311 = 0,1823215544 \ldots$$
$$21984\tfrac{1}{3}:120580 = 0,1823215569 \ldots$$

Es iſt aber log. $\frac{6}{5} = 0,18232155679395 \ldots$ woraus man ſieht, daß dieſe Brüche noch ziemlich geſchwinde den wahren Werthe näher kommen. Wenn wir die Theilung mit der Zahl

Zahl ſelbſt vornehmen, ſo fällt die Rechnung folgendermaſſen aus

1 0000000000		1	0
1823215568	5	0	1
883922160	2	1	5
55371248	15	2	11
53353440	1	31	170
2017808	25	33	181
2908240			
ꝛc.			

woraus man ſieht, daß der letzte Quotient 25 hätte um 1 gröſſer ſeyn können. Läßt man denſelben aber ſo wie er iſt, ſo wird der folgende $= \frac{2}{3}$, und ſo kommen alle Quotienten heraus, die wir vermittelſt der unendlichen Reihe gefunden haben.

§. 20.

Setzt man 2 = 1, in welchem Fall die Reihe ſelbſt ſehr wenig convergirt, ſo erhält man

$$\log. 2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2{:}3+\cfrac{1}{7+ \text{ꝛc.}}}}}}}}$$

und

und dieſes giebt

	1	0
1 —	0	1
2 —	1	1
3 —	2	3
1 —	7	10
5 —	9	13
2:3 —	52	75
7 —	$43\frac{2}{3}$	63
2c. —	$357\frac{2}{3}$	516

Nun iſt

$$\frac{7}{10} = 0,700 \ldots\ldots$$
$$\frac{9}{13} = 0,6923 \ldots\ldots$$
$$\frac{52}{75} = 0,6933 \ldots\ldots$$
$$\frac{131}{189} = 0,69312 \ldots\ldots$$
$$\frac{1073}{1548} = 0,693152 \ldots$$
2c.
$$\log. 2 = 0,693147 \ldots$$

Man ſieht hieraus, daß auch in dieſem Fall die Brüche ſich dem wahren Werthe noch merklich geſchwinde nähern.

§. 21.

Wenn $z > 1$ iſt, ſo wird die Reihe

$$\log. (1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \text{2c.}$$

divergent, und giebt gar keinen Werth, der ſich beſtimmen lieſſe. Laßt uns demnach ſehen, ob es mit unſern Brüchen beſſer geht. Es ſey

z. E.

z. E. 2 = 2, ſo haben wir

$$\log. 3 = \cfrac{1}{1:2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3:2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5:2 + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{7:2 + \text{rc.}}}}}}}}$$

um hiebey die Brüche zu vermeiden, werden wir die Figur ſo vorſtellen

	12	0		
1:2	0	12	=	0:1
2	12	6	=	2:1
3:2	24	24	=	1:1
1	48	42	=	8:7
5:2	72	66	=	12:11
2:3	228	207	=	76:69
7:2	224	204	=	56:51
rc.	1012	921	=	1012:921

Nun iſt

8:7 = 1,14 .....
12:11 = 1,0909 ...
76:69 = 1,1014 ...
56:51 = 1,0980 ...
1012:921 = 1,0988 ...
rc.

log. 3 = 1,098612 ...

Man

Man ſieht demnach, daß die Brüche nicht divergiren, ſondern in der That dem wahren Werthe näher kommen, ſo, daß der letzte kaum um 0,0002 davon verſchieden iſt.

§. 22.

Nimmt man für z eine gröſſere Zahl, ſo muß man zwar die Rechnung weiter fortſetzen, bis man auf Brüche kömmt, die dem wahren Werthe ſehr nahe kommen. Es wird aber immer angehen. Denn die Quotienten, ſo man wenn die Theilung der Reihe fortgeſetzt wird, findet, haben in der Art, wie ſie aufeinander folgen, ein ſehr einfaches Geſetz. Sie ſind nemlich

$$\frac{1}{z}, \frac{2}{1}, \frac{3}{z}, \frac{2}{2}, \frac{5}{z}, \frac{2}{3}, \frac{7}{z}, \frac{2}{4}, \frac{9}{z}, \frac{2}{5}, \frac{11}{z}, \frac{2}{6}, \frac{13}{z} \text{ ꝛc.}$$

wobey folglich die Glieder, ſo durch z dividirt ſind, nach der Ordnung der ungeraden Zahlen fortgehen, und folglich ihr Zähler endlich gröſſer wird als jede fürgegebene Zahl. Hingegen nehmen zwar die nicht durch z getheilte Glieder $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}$ ꝛc. immer ab, es hindert dieſes aber nicht, daß die dadurch herfürgebrachte Brüche nicht ſolten dem wahren Werthe näher kommen, als die nächſtvorhergehenden; und wie wir aus dem letzten Beyſpiele ſehen, ſo vermindern ſie das Anwachſen der Zahlen, ſo die Zähler und Nenner der Brüche ſind. Wir haben demnach hiedurch ein Mittel den Werth unendlicher Reihen auch für diejenigen Fälle zu finden, wo die Reihen ſelbſt divergirend werden.

Digitized by Google

§. 23.

Für die Reihe

$$v = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \tfrac{1}{9}z^9 - \text{rc.}$$

welche den Bogen eines Circuls durch ſeine Tangente ausdrücket, findet man nach angeſtellter Theilung auf eine ganz ähnliche Art

$$v = \cfrac{1}{1:z + \cfrac{1}{3:z + \cfrac{1}{5:4z + \cfrac{1}{28:9z + \cfrac{1}{81:64z + \cfrac{1}{704:225\,z + \text{rc.}}}}}}}$$

Es ſey z. E. $z = 1$, in welchem Fall die Reihe faſt gar nicht convergirt, ſo haben wir

$$\text{arc. } 45^\circ = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5:4 + \cfrac{1}{28:9 + \cfrac{1}{81:64 + \cfrac{1}{704:225 + \text{rc.}}}}}}}$$

folglich, um die Brüche zu vermeiden

	36	0		
1 ——	0	36		
3 ——	36	36		
5:4 ——	108	144	= 3:4	= 0,75 .....
28:9 —	171	216	= 19:24	= 0,7917 ...
81:64 —	640	816	= 40:51	= 0,7843 ...
	981	4995:4	= 436:555	= 0,7856 ...

Es iſt aber der Bogen von 45 Gr. ... = 0,7854

woraus

woraus man wiederum ſieht, daß dieſe Brüche dem wahren Werthe noch merklich geſchwinde näher kommen.

§. 24.

Die Quotienten, ſo man bey der Diviſion dieſer Reihe findet, haben ebenfalls ein ſehr ordentliches Geſetz, nach welchem ſie auf einander folgen. Es ſind nemlich dieſelben der Ordnung nach

$$\frac{1}{z},\ \frac{3}{1.z},\ \frac{5}{4.z},\ \frac{7.4}{9.z},\ \frac{9.\ 9}{4.16.z},\ \frac{11.\ 4.16}{9.25.z},$$

$$\frac{13.\ 9.25}{4.16.36.z},\ \frac{15.4.16.36}{9.25.49.z},\ \frac{17.\ 9.25.49}{4.16.36.64.z},$$

$$\frac{19.\ 4.16.36.64}{9.25.49.81.z}\ \text{ꝛc.}$$

In den Zählern kommen nemlich der Ordnung nach die ungeraden Zahlen vor. Die übrigen Factores ſind lauter Quadratzahlen, welche wechſelsweiſe Nenner und Zähler werden. In jede Nenner kömmt eine neue, oder die nächſt gröſſere Quadratzahl als ein Factor hinzu, und dieſe beſtimmt, wie die vorhergehende vertheilt werden, weil die geraden und ungeraden nicht zugleich im Nenner oder im Zähler vorkommen. Alle dieſe Brüche ſind durch z dividirt. Hingegen werden ſie nicht wechſelsweiſe immer gröſſer und kleiner, ſondern ſie nähern ſich zwoen beſtimmten Gröſſen, nemlich die Brüche

$$\frac{3}{1},\ \frac{7\cdot4}{9},\ \frac{11\cdot4\cdot16}{9\cdot25},\ \frac{15\cdot4\cdot16\cdot36}{9\cdot25\cdot49}\ \text{ꝛc.}$$

nähern ſich der Zahl 3,1415926 .... welche den halben Umkreiß des Circuls vorſtellt. Ihr allgemeiner Ausdruck iſt

$$\frac{(4x+3)(2^2.4^2.6^2.8^2\ldots\ldots(2x)^2)}{3^2.5^2.7^2.9^2\ldots\ldots(2x+1)^2}$$

Hingegen nähern ſich die Brüche

$$\frac{1}{1},\ \frac{5}{4},\ \frac{9\cdot9}{4\cdot16},\ \frac{13\cdot9\cdot25}{4\cdot16\cdot36},\ \frac{17\cdot9\cdot25\cdot49}{4\cdot16\cdot36\cdot64}\ \text{ꝛc.}$$

der Zahl, welche herauskömmt, wenn man 4 durch den halben Umkreis des Circuls 3,1415926.... dividirt, und welche demnach $=1,27323954473\ldots$ ꝛc. iſt. Dieſes macht nun, daß, wenn man $z > 1$ annimmt, die Brüche ſich dem wahren Werthe ſehr langſam nähern. Da ſie ſich aber dennoch nähern, ſo haben ſie vor der Reihe ein vieles voraus, weil dieſe in allen den Fällen, wo $z > 1$ iſt, divergirt, und daher gar keinen Werth giebt.

§. 25.

Es giebt überdies noch andere Arten, wie man, ohne eben eine Theilung vorzunehmen, zu den Quotienten gelangen kann, die man, um ſolche Brüche heraus zu bringen, nöthig hat. So z. E. wenn aus jeder Zahl $AA + BB$ die Quadratwurzel ſolle ausgezogen werden,

ſo

Digitized by Google

ſo könnte man nach Anleitung der Newtonſchen Binomialformel dieſe Wurzel durch eine unendliche Reihe ausdrücken, und vermittelſt dieſer Reihe die Quotienten ſuchen, und ſo würde man der Ordnung nach und wechſelsweiſe $A, \frac{2A}{BB}, 2A, \frac{2A}{BB}, 2A$ &c. finden, welches den Bruch

$$1:\sqrt{(A^2+B^2)} = \cfrac{1}{A + \cfrac{1}{2A:BB + \cfrac{1}{2A + \cfrac{1}{2A:BB + \&c.}}}}$$

und daher die Wurzel

$$\sqrt{(AA+BB)} = A + \cfrac{1}{2A:BB + \cfrac{1}{2A + \cfrac{1}{2A:BB + \&c.}}}$$

geben würde. Man kann aber dieſe Formel unmittelbar folgendergeſtalten finden. Man ſetze $\sqrt{(AA+BB)} = A+y$, ſo iſt

$$AA+BB = AA+2Ay+yy,$$

folglich $y(y+2A) = BB$

und daher

$$y = \frac{BB}{2A+y}.$$

Nun kann man für das y, ſo in dem Nenner des Bruches iſt, den Bruch ſelbſt wiederum ſetzen, ſo hat man

$$y = \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + y}}$$

fährt man auf gleiche Art fort, ſo wird

$$y = \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \&c.}}}}$$

Und hiebey darf man nur jeden Bruch durch BB theilen, um ſodann die vorige Formel

$$y + A = \sqrt{(AA + BB)} = A + \cfrac{1}{2A:BB + \cfrac{1}{2A + \cfrac{1}{2A:BB + \&c.}}}$$

zu erhalten.

§. 26.

Es ſey nun z. E. die Quadratwurzel aus 38 zu ziehen; ſo ſetzt man $38 = 36 + 2$, demnach $36 = AA$, $2 = BB$, $A = 6$, $2A:BB = 6$, und ſo hat man

$$\sqrt{38} = 6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \&c.}}}}$$

Dieſes giebt nun folgende Figur

	1	0
6	0	1
12	1	6
6	12	73
12	73	444
6	888	5401
ꝛc.	5401	32850

demnach iſt $\sqrt{38} < 1\frac{1}{6}$

$> 1\frac{12}{73}$

$< 1\frac{73}{444}$

ꝛc.

Man kann ſich aber auch der erſten Formel

$$\sqrt{(AA+BB)} = A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \&c.}}}$$

bedienen, und die Quadratwurzel durch eine Reihe von Regeln de tri finden, welche man ſo lange fortſetzen kann, als man es der Genauigkeit halber nöthig erachtet. Und dieſes findet ſtatt, ſo oft die fürgegebene Zahl eine Summe von zwoen Quadratzahlen iſt, von welchen man die Wurzeln hat. Denn da macht man der Ordnung nach

$$2A : B = B : a$$
$$(2A + a) : B = B : b$$
$$(2A + b) : B = B : c$$
&c.

und die Zahlen $A + a$, $A + b$, $A + c$ &c. werden der wahren Wurzel deſto näher kom-

men, je weiter man dieſe Analogien fortgeſetzt hat, und je gröſſer A als B iſt.

§. 27.

Um aber genauer zu ſehen, wie ſich dieſe gefundenen Werthe dem wahren nähern, ſo werden wir für A, B ſolche Ausdrücke nehmen, die ein Quadrat geben. Man ſetze demnach

$$A = a - b$$
$$BB = 4ab,$$

ſo iſt

$$AA + BB = a^2 + 2ab + bb$$

und

$$\surd(AA + BB) = a + b = A + y$$

demnach $y = 2b$

und

$$\surd(AA + BB) = (a - b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \&c.}}$$

Wird nun dieſer Bruch ſtuffenweiſe um ein Glied weiter abgebrochen und die Reduction vorgenommen, ſo erhält man der Ordnung nach

$$\surd(AA - BB) = a - b + 2ab\,(a + b) : (a^2 - b^2)$$
$$= a - b + 2ab(a^2 - b^2) : (a^3 + b^3)$$
$$= a - b + 2ab\,(a^3 + b^3) : (a^4 - b^4)$$

&c.

$$= a - b + 2ab\,(a^{2n} - b^{2n}) : (a^{2n+1} + b^{2n+1})$$
$$= a - b + 2ab(a^{2n+1} + b^{2n+1}) : (a^{2n+2} + b^{2n+2})$$

Um dieſes überhaupt zu beweiſen, darf man nur ſetzen, daß man mit Beybehaltung von

2n Gliedern des Bruches auf den Ausdrucke

$$\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

gekommen. Denn ſo wird man, wenn man um eine Stuffe tiefer anfängt den Ausdruck

$$\frac{4ab}{2(a-b)+\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}}$$

erlangen. Nimmt man bey dieſem die Reduction vor, ſo verwandelt derſelbe ſich in

$$\frac{2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1})}{a^{2n+1}-b^{n2+1}}$$

Und dieſer kommt ebenfalls heraus, wenn man in den erſt angenommenen

$$\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

für n, n+1 ſetzt, und die Zeichen verwechſelt, welche vor b ſtehen. Iſt demnach $a > b$, ſo läßt ſich n ſo groß annehmen, daß die Formel ſich in

$$\sqrt{(A^2+B^2)} = a-b+\frac{2ab.a^{2n}}{a^{2n+1}}$$
$$= a-b+2b = a+b$$

verwandelt, welches ſodann in der That die Wurzel iſt. Man ſieht zugleich hieraus, daß, weil

$$a-b+\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}=a+b-\frac{2(a-b)b^{2n}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

und

$$a-b+\frac{2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1})}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}=a+b+\frac{2(a+b).b^{2n+1}}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}$$

iſt, die Brüche ſich dem wahren Werthe der Wurzel in einer Progreßion nähern, welche einer geometriſchen deſto näher kommen, je gröſſer n iſt, und daß die Brüche, welche zu groß ſind, immer um mehr zu groß ſind, als die, ſo zu klein ſind, zu klein ſind. Denn die Unterſchiede der erſtern ſind mit $(a+b)$, die Unterſchiede der andern mit $(a-b)$ multiplicirt. Die Näherung iſt am langſamſten, wenn $A=B$ iſt. Nun iſt aber überhaupt

$$2a=+A+\sqrt{(A^2+B^2)}$$
$$2b=-A+\sqrt{(A^2+B^2)}$$

demnach für den Fall, wo $A=B$ iſt, findet ſich

$$2a=A(+1+\sqrt{2})=2,4142136\ldots.$$
$$2b=A(-1+\sqrt{2})=0,4142136\ldots.$$

demnach

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}=5,8284272\ldots$$

Da nun die Brüche entweder um

$$\frac{2(a-b)b^{2n}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}=\frac{2\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}{1+(b:a)^{2n+1}}$$

zu klein, oder um

$$\frac{2(a+b)b^{2n+1}}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}=\frac{2(1+b:a).(b:a)^{2n+1}}{1-(b:a)^{2n+2}}$$

zu klein ſind, und

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2} = 0,1715728\ldots$$

folglich immer kleiner als $0,1715728$, oder ungefehr $\frac{1}{6}$ iſt, ſo ſieht man, daß der Unterſchied jedes folgenden Bruches von dem wahren Werthe der Wurzel immer wenigſtens 6 mal kleiner wird, ſo oft man nemlich für A die gröſſere, für B aber die kleinere Zahl nimmt. Denn widrigenfalls iſt die Näherung langſamer.

§. 28.

Man ſetze z. E. $A = 4$, $B = 3$, ſo weiß man daß die Quadratwurzel von $A^2 + B^2 = 16 + 9 = 25$, wird $= 5$ ſeyn. Nach unſerer Formel haben wir $2A : BB = 8 : 9$, und $2A = 8$, folglich $y = 1$, und

	81	0	
8:9 ———	0	81	
8 ———	81	72 =	9:8
8:9 ——	648	657 =	72:73
8 ——	657	656 =	657:656
ꝛc.	5904	5905 =	5904:5905

Da nun dieſe Brüche ſolten $= y = 1$ ſeyn, ſo ſieht man, daß die Unterſchiede $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{73}$, $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{5905}$ ꝛc. ſind, und daher jeder folgende bey 9 mal kleiner wird.

§. 29.

Bey den Cubicwurzeln läßt ſich der bey den Quadratwurzeln gebrauchte Vortheil nicht anbrin-

anbringen. Nimmt man aber die Reihe

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a + \frac{b}{3a^2} - \frac{1.2b^2}{3.6a^5} + \frac{1.2.5b^3}{3.6.9a^8} - \frac{1.2.5.8b^4}{3.6.9.12a^{11}} + \text{ꝛc.}$$

vor, und theilt ſie anfangs durch 1, ſo, daß der erſte Quotient $= a$ ſey, und ſodann jeden Theiler durch den Ueberreſt, ſo ſind die Quotienten der Ordnung nach

$$a,\ \frac{3a^2}{b},\ a,\ \frac{9a^2}{2b},\ \frac{4a}{5},\ \frac{75a^2}{14b},\ \frac{7a}{10},\ \frac{6a^2}{b},\ \text{\&c.}$$

demnach

$$1 : \sqrt[3]{(a^3+b)} = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{3a^2 : b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{9a^2 : 2b + \text{ꝛc.}}}}}$$

und

$$\sqrt[3]{(a^3+b)} = a + \cfrac{1}{3a^2 : b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{9a^2 : 2b + \cfrac{1}{4a : 5 + \cfrac{1}{75a^2 : 14b + \text{ꝛc.}}}}}}$$

dieſe Quotienten geben nun Brüche, die ſehr geſchwinde ſich dem wahren Werthe der Wurzel nähern. Wir wollen es für den Fall zeigen, wo es noch am langſamſten zugeht, weil wir $a = b = 1$ ſetzen wollen. Denn es iſt klar, daß, wenn $a > 1$ und $b < a$ iſt, die Quo-

Quotienten merklich gröſſer werden. Setzen wir demnach $a = b = 1$, ſo iſt $\sqrt[3]{(a^3 + b)} = \sqrt[3]{2}$ folglich die Cubicwurzel von 2 zu ſuchen, welche $= 1,259921 \ldots$ iſt. Wir haben demnach

	140	0			
3	0	140	=	0 : 1	
1	140	420	=	1 : 3	= 0, 333 ...
9 : 2	140	560	=	1 : 4	= 0, 25
4 : 5	770	2940	=	11 : 41	= 0, 268 ...
75 : 14	756	2912	=	27 : 104	= 0, 2596 ...
7 : 10	4820	18540	=	241 : 927	= 0, 259976 ...
6	4130	15890	=	59 : 227	= 0, 259912 ...
ꝛc.	29600	113880	=	740 : 2847	= 0, 2599227 ...

Demnach, wenn wir $a = 1$ addiren, die geſuchten Werthe

1, 333 ...
1, 25
1, 268 ...
1, 2596 ...
1, 259976 ...
1, 259912 ...
1, 2599227 ... ꝛc.

Die Quotienten, oder beſſer zu ſagen, deren Coefficienten 3, 1, $\frac{9}{2}$, $\frac{4}{5}$, ꝛc. folgen nach einem gewiſſen Geſetze auf einander. Es ſind nemlich die Glieder folgender Reihe

$$\frac{1.3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3.3.2}{1.4}, \frac{2.4}{2.5}, \frac{5.3.2.5}{1.4.7}, \frac{2.4.7}{2.5.8}, \frac{7.3.2.5.8}{1.4.7.10} \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\frac{3}{1}, \frac{1}{1}, \frac{9.2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{15.2.5}{4.7}, \frac{4.7}{5.8}, \frac{21.2.5.8}{4.7.10} \text{ ꝛc.}$$

§. 30.

§. 30.

Man kann dieſes Geſetz allgemeiner vorſtellen, wenn man überhaupt die Wurzel

$$\sqrt[m]{(a^m+b)}$$

in eine Reihe auflöſet, und vermittelſt dieſer Reihe durch die Diviſion die Quotienten ſucht. Denn da findet man ſie in folgender Ordnung

$$\frac{ma^{m-1}}{b},\ \frac{2}{m-1}a,\ 3.m.\frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{a^{m-1}}{b},\ \frac{2.}{m-1},\ \frac{m+1.a,}{2m-1}$$

$$5m.\frac{m-1}{m+1}.\frac{2m-1}{2m+1}.\frac{a^{m-1}}{b},\ \frac{2.m+1}{m-1}.\frac{2m+1}{2m-1}.\frac{1.a}{3m-1},\ \text{ꝛc.}$$

dieſe geben demnach überhaupt

$$\sqrt[m]{(a^m+b)} = a + \cfrac{1}{ma^{m-1}:b + \cfrac{1}{2a:m-1 + \cfrac{1}{3.m.(m-1)a^{m-1}:(m+1)b + \&c.}}}$$

Man ſieht zugleich hieraus, daß dieſe Quotienten bey jeder Wurzel wechſelsweiſe zu- und abnehmen, und daß ihre Coefficienten nur bey der Quadratwurzel beſtändig $=2$ ſind. Setzt man für m, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ꝛc. ſo erhält man Dignitäten von (a^m+b), und da irgend einer der Quotienten anfängt unendlich zu werden, ſo wird die Reihe daſelbſt abgebrochen, und man erhält die Dignität ganz rein. Es ſey z. E. $m=2$, und $a=b=1$, ſo ſind die Coefficienten

$$+\tfrac{1}{2},\ -4,\ -\tfrac{1}{2},\ \infty.$$

Folg-

Folglich die Figur

4	0
+1:2 - - - 0	4
−4 - - + 4	+2 = 2
−1:2 - −16	−4 = 4
+12	+4 = 3

demnach $(1+1)^2 = 1+3 = 4$.

§. 31.

Wir werden nun zu andern Reductionen der Brüche, und beſonders der Decimalreihen fortſchreiten. Wenn man mit einer Decimalreihe, wie z. E. mit 3, 1415926 .... oft zu multipliciren hat, und beſonders wenn entweder große Zahlen, oder andere Decimalreihen damit ſolten multiplicirt werden, ſo iſt ein ſolches Multipliciren, wegen der Weitläuftigkeit, beſchwerlich. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, demſelben abzuhelfen. So z. E. um bey eben dieſer Reihe 3, 1415926 .... zu bleiben, welche dem Umkreis des Circuls ausdrückt, fand ich

$$3,1415926 \text{ ꝛc.} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{800} - \frac{1}{70000} - \frac{1}{5000000} - \frac{1}{300000000} - \frac{1}{5000000000} - \frac{1}{50000000000} + \frac{1}{4000000000000000} - \frac{1}{200000000000000000} - \text{ꝛc.}$$

Weiter

Weiter habe ich dieſe Reihe nicht verfolgt, weil man ohnehin ſelten bis auf 14 Decimalziffern rechnet. Man ſieht ſogleich und auf eine ſehr klare Art daraus, um wie viel die archimediſche Proportion, welche die erſten zwey Glieder dieſer Reihe vorſtellen, zu groß iſt, um wie viel man noch fehlt, wenn man ſie um $\frac{1}{800}$ des Diameters vermindert ꝛc. Es iſt beynahe ganz unnöthig, daß ich die Methode herſetze, nach welcher ich dieſe Reihe gefunden. Denn da ich mir dabey vorgeſetzt hatte, ſolche Brüche zu finden, deren Zähler = 1, die Nenner aber eine ganz einfache Zahl mit angehenkten 0 seyn ſolten, damit man ohne Mühe dividiren könne, ſo war leicht voraus zu ſehen, daß dieſe Nenner ohne alle Ordnung würden gröſſer werden, weil der Umſtand, daß wir nur bis auf 9 zählen, ganz willkührlich iſt, und mit der Quadratur des Circuls nichts zu thun hat. Das einige Mittel, ſo demnach übrig bliebe, war, daß ich die Ludolphiſchen Zahlen

3, 141592653589, 793238, ꝛc.

vor mich nahme, ſodann erſtlich 3 abzoge, und von dem Ueberreſte, welcher beynahe $\frac{1}{7}$ war, zog ich $\frac{1}{7}$ ab. Da aber $\frac{1}{7}$ gröſſer ware als der Ueberreſt, ſo ſahe ich, daß dieſer ſodann von $3\frac{1}{7}$ muſte abgezogen werden. Nun war dieſer Ueberreſt etwas gröſſer als $\frac{1}{800}$. Ich zoge demnach $\frac{1}{800}$ ab, und fand das Uebrigbleibende noch etwas gröſſer als $\frac{1}{70000}$. Dieſes zoge ich demnach wiederum ab, und was übrig bliebe,

bliebe, war noch etwas gröſſer als $\frac{1}{5000000}$. Auf dieſe Art fuhr ich fort, bis der Ueberreſt gröſſer als $\frac{1}{600000000000}$, und nur ein wenig kleiner als $\frac{1}{50000000000}$ war. Ich zoge denſelben demnach von dieſem letztern Bruche ab, und damit muſte das Zeichen — in + verwandelt werden, weil mit $\frac{1}{50000000000}$ zu viel war weggenommen worden ꝛc.

§ 32.

Man ſieht ohne mein Erinnern, daß es bey Ausfindung ſolcher Brüche eigentlich darum zu thun iſt, daß die Anzahl der o in den Nennern geſchwinde zunehme, damit man mit wenigern Theilungen weiter reiche. Hiezu kann man nun keine allgemeine Regel geben, theils weil man die Ueberreſte bey ſolchen Brüchen nicht vorher ſehen kann, theils weil es mehrere Anordnungen der Brüche giebt, die zuletzt dennoch auf eines hinaus laufen. So z. E. findet man

$$\frac{1}{3,1415926 \text{ ꝛc.}} = 0,3183098861837906 57153 \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{60} + \frac{1}{600} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{600000}$$

$$- \frac{1}{9000000} - \frac{1}{400000000} - \text{ꝛc.}$$

oder auch

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{50} + \frac{1}{200} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{600000} - \frac{1}{9000000} - \frac{1}{400000000000} - \text{2c.}$$

Denn es iſt

$$\frac{1}{60} - \frac{1}{600} = \frac{1}{50} - \frac{1}{200}.$$

Man wird eben ſo auch die Reihe

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{70} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{4000} + \frac{1}{80000} - \frac{1}{5000000} - \frac{1}{30000000} + \frac{1}{2000000000} - \frac{1}{30000000000} + \text{2c.}$$

finden, welche eben den Werth giebt, und von den beyden vorhergehenden, von dem zweyten Gliede an, ganz verſchieden iſt.

§. 33.

Dieſe Reihen ſind nun in dem Gebrauche ſehr vortheilhaft. Man ſieht mit einem male, bis auf die wievielſte Decimalſtelle jeder Bruch reicht, und wie viele Theilungen man folglich vorzunehmen hat, um zu einem fürgegebenen Grade der Genauigkeit zu gelangen. Wer überdies leicht im Rechnen geübt iſt, dem fällt es nicht ſchwerer mit einer Ziffer zu dividiren, als zu multipliciren, und er gebraucht kein beſonder

ſonder Blatt dazu, um jeden Quotienten zu finden.

§. 34.

Indeſſen iſt eben dieſe Leichtigkeit Schuld daran, daß dieſe Reihen weniger convergiren, als es an ſich geſchehen könnte. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, jede Decimalreihe, oder auch andere Brüche, in ſolche Brüche aufzulöſen, deren Zähler = 1, die Nenner aber in der gröſten möglichen Verhältniß der Ordnung nach gröſſer ſeyn. Dieſe Auflöſung geht nun ſtuffenweiſe von ſtatten, und die Bedingung, daß alle Zähler ſollen = 1 ſeyn, giebt die Methode von ſelbſt an. Es ſey z. E. der Bruch $\frac{94}{127}$. Da dieſer nun näher bey 1 als bey $\frac{1}{2}$ iſt, ſo wird er von 1 abgezogen, demnach

$$\frac{94}{127} - \frac{127}{127} = - \frac{33}{127}.$$

Nun iſt $\frac{33}{127}$ näher bey $\frac{1}{4}$ als bey $\frac{1}{3}$. Man zieht demnach $\frac{1}{4}$ davon ab, und ſo iſt

$$\frac{33}{127} - \frac{1}{4} = \frac{132 - 127}{4.127} = \frac{5}{508}.$$

Eben ſo iſt dieſer neue Ueberreſt $\frac{5}{508}$ näher bey $\frac{1}{102}$ als bey $\frac{1}{101}$, man zieht demnach $\frac{1}{102}$ davon ab, und ſo iſt

$$\frac{5}{508} - \frac{1}{102} = \frac{510 - 508}{508.102} = \frac{1}{508.51} = \frac{1}{4.127.51}$$

demnach wenn man nun den Rückweg nimmt

$$\frac{5}{508}=\frac{1}{102}+\frac{1}{4.127.51}$$

$$\frac{33}{127}=\frac{1}{4}+\frac{1}{102}+\frac{1}{4.127.51}$$

$$\frac{94}{127}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{102}-\frac{1}{4.127.51}.$$

§. 35.

Wiederum, es ſey $\frac{355}{113}$ in eine ſolche Reihe von Brüchen aufzulöſen, ſo macht man erſtlich

$$\frac{355}{113}=3+\frac{16}{113}$$

ſodann, weil $\frac{16}{113}$ dem $\frac{1}{7}$ am nächſten kömmt

$$\frac{16}{113}-\frac{1}{7}=-\frac{1}{791}=-\frac{1}{7.113}.$$

Da nun der Ueberreſt $\frac{1}{791}$ ſchon 1 zum Zähler hat, ſo gebraucht es keiner weitern Auflöſung, und es iſt ganz kurz

$$\frac{355}{113}=3+\frac{1}{7}-\frac{1}{7.113}$$

Man ſieht hieraus, um wie viel die Metianiſche Proportion des Umkreiſes zum Diameter von der Archimediſchen verſchieden iſt. Kehrt man den Bruch $\frac{355}{113}$ um, ſo findet man auf eine ganz ähnliche Art

$$\frac{113}{355} - \frac{1}{3} = - \frac{16}{3 \cdot 355} = - \frac{16}{1065}$$

$$\frac{16}{1065} - \frac{1}{67} = + \frac{7}{67 \cdot 1065} = + \frac{7}{71355}$$

$$\frac{7}{71355} - \frac{1}{10194} = + \frac{3}{10194 \cdot 71355} = \frac{1}{242464290}$$

ſoglich

$$\frac{113}{355} = \frac{1}{3} - \frac{1}{67} - \frac{1}{10194} - \frac{1}{242464290}.$$

Man ſagt nemlich: 113 in 355 geht 3 mal, und es bleiben 16 übrig. 16 in 3 mal 355, oder 1065 geht 67 mal, und es fehlen 7. Endlich 7 in 67 mal 1065, oder 71355 geht 10194 mal, und es fehlen 3. Dieſes 3 in 10194 mal 71355 geht genau 242464290 male. Und damit ſind die Nenner 3, 67, 10194 und 242464290 gefunden.

§. 36.

Bey den Decimalreihen verfährt man auf eine ganz ähnliche Art, nur daß man die Brüche, ſo man herausbringt, in Decimalreihen verwandelt, um zu finden, wie nahe ſie dem wahren Werthe der Reihe kommen, und was noch entweder hinzu zu ſetzen oder weg zu nehmen iſt. So z. E. iſt für die Ludolphiſche Zahlen

	π	$=$	3,141592653589793238 ꝛc.
A	$3\frac{1}{7}$	$=$	3,142857142857142857 ꝛc.
a		$-$	0,001264489267349618 ꝛc.
B	$-\frac{1}{791}$	$=$	1264222503151706 ꝛc.
b		$-$	266764197911 ꝛc.
C	$-\frac{1}{3748629}$	$=$	266764195656 ꝛc.
c			2255 ꝛc.
D	$-\frac{1}{443384023362059}$	$=$	2255 ꝛc.

Hier müſſen nemlich die Brüche B, C, D aus den Ueberreſten a, b, c gefunden werden, indem man 1 durch dieſelben dividirt. Man hat nicht nöthig hiezu die ganze Reihen a, b, c zu nehmen, ſondern es iſt genug, wenn man von den erſten Zahlen derſelben ſo viel nimmt als nöthig iſt, die Quotienten, ſoweit dieſe ganze Zahlen ſind, zu beſtimmen. Sind auf dieſe Art die Brüche A, B, C, D gefunden, ſo verwandelt man ſie in Decimalreihen, um ſie ſodann abzuziehen. Ich habe, um dieſe Brüche zu finden, von der Reyhe π in allem 30 Decimalſtellen zur Rechnung genommen, und fand demnach, daß die Formel

$$3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{791} - \frac{1}{3748629} - \frac{1}{443384023362059} - \text{ꝛc.}$$

die Ludolphiſche Zahlen bis auf die 28te Decimalſtelle richtig giebt. Die zwey erſten Glieder geben die Archimediſche Proportion $\frac{22}{7}$, die drey erſten aber

3 +

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{791}=3+\frac{113-1}{791}=3\frac{16}{113}=\frac{355}{113}$$

geben die Metianiſche $\frac{355}{113}$. Man ſieht alſo hieraus, daß unter den kleinern Verhältniſſen dieſe beyden die genaueſten ſind, und daß von der Metianiſchen bis zur nächſt gröſſeren ein merklicher Sprung iſt.

§. 37.

Die Reihen von Brüchen, in welche man auf dieſe Art jede Decimalreihe verwandeln kann, ſind nun diejenigen, die unter allen am geſchwindeſten convergiren. Es haben aber dieſe Brüche in der Art, wie ſie auf einander folgen, kein Geſetz unter ſich. Die Nenner haben zuweilen Theiler, zuweilen ſind es Primzahlen, und jede Reihe hat, in Anſehung des Convergirens, etwas beſonders. Es kommt viel darauf an, daß ſchon der erſte Bruch dem wahren Werthe der Reihe ſehr nahe komme. Denn man ſieht leicht, daß wenn man in unſerm Beyſpiele anſtatt der Reihe A, welche $\frac{22}{7}$ iſt, gleich anfangs $\frac{355}{113}$ als die Summe beyder Reihen A, B genommen hätte, der folgende Bruch unmittelbar würde C geweſen ſeyn. Die Anzahl der Ziffern in dem Nenner eines jeden folgenden Bruches wird immer doppelt, und mehrentheils um eine Ziffer mehr als doppelt gröſſer. Es kann auch in einigen Fällen

geſchehen, wo ein Nenner weit über doppelt mehr Ziffern bekömmt, als der nächſt vorhergehende. Dieſes geſchieht aber gleichſam nur zufälliger Weiſe, wenn man nemlich eine ſolche Reihe vor ſich hat, welche einem gewiſſen Bruche beynahe gleich iſt.

§. 38.

Wenn man nicht ſo genau darauf ſieht, daß ſolche Reihen unter allen am geſchwindeſten convergiren, ſo laſſen ſich ſolche finden, die nach gewiſſen Geſetzen fortgehen. So z. E. es ſey die Frage jede Decimalreihen in eine Reihe von Brüchen von folgender Form

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{a.\,b} + \frac{1}{a.\,b.\,c} + \frac{1}{a.\,b.\,c.\,d} + \text{ꝛc.}$$

zu verwandeln, und zwar mit der gedoppelten Bedingung, daß a, b, c, d &c. ganze Zahlen ſeyn, und die Reihe unter allen von dieſer Art am geſchwindeſten convergire. Die Aufloſung dieſer Aufgabe hat nun ebenfalls gar keine Schwürigkeit, und wir können ſogleich anfangen, ſie in einem Beyſpiele zu zeigen, wozu wir ebenfalls wiederum die Ludolphiſchen Zahlen nehmen werden. Die Rechnung iſt demnach folgende

Digitized by Google

$\pi = 3,141592,653589,793238,462643,38$ ꝛc.

$3 + \frac{1}{7} = 3,142857,142857,142857,142857,14$ ꝛc.

$M = -\ 1264,489267,349618,680213,76$ ꝛc.

$A = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{113} = 1264,222503,151706,700379,27$ ꝛc.

$N = -\ 266764,197911,979834,49$ ꝛc.

$B = \frac{A}{4739} = 266769,867725,618632,49$ ꝛc.

$O = +\ 5,669813,638798,00$ ꝛc.

$C = \frac{B}{47051} = 5,669802,293800,74$ ꝛc.

$P = +\ 11,344997,26$ ꝛc.

$D = \frac{C}{499762} = 11,345004,81$ ꝛc.

$Q = -\ 7,55$ ꝛc.

ꝛc.

folglich

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \cdot 113} - \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739} + \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739 \cdot 47051}$$
$$+ \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739 \cdot 47051 \cdot 499762} - \text{ꝛc.}$$

Man dividirt nemlich $\frac{1}{7}$ durch den erſten Ueberreſt M, um den Nenner 113 zu finden. So dann theilt man $\frac{1}{7}$ durch 113, um die Reihe A zu finden. Dieſe wird von M abgezogen, und ſo erhält man den zweyten Ueberreſt N. Sodann giebt die Theilung $\frac{A}{N}$ den Nenner 4739, und $\frac{A}{4739}$ die Reihe B, welche von N abgezogen, den 3ten Ueberreſt O giebt, mit welchem man auf eine ganz ähnliche Art verfährt ꝛc.

§. 39.

Die Reihen, die man nach dieſer Methode findet, haben den Vortheil, daß man ſogleich ſieht, wie vielmal jeder Bruch kleiner iſt, als der nächſt vorhergehende, und daß man bey ihrem Gebrauche nicht mit ſo groſſen Zahlen zu dividiren hat, weil jedes Glied durch das nächſt vorhergehende gefunden werden kann. Jeder neue Factor hat wenigſtens ſo viel, mehrentheils aber mehr Ziffern, als der nächſt vorhergehende. Lezters hängt von der beſondern Art der Reihe ab, die man in ſolche Brüche aufzulöſen vornimmt. Daher findet ſich in Anſehung des Convergirens ein merklicher Unterſchied. So z. E. findet man

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.22} + \frac{1}{3.22.118} - \frac{1}{3.22.118.384} - \text{ꝛc.}$$

Dieſe Reihe convergirt demnach merklich langſamer als die, ſo wir erſt für π gefunden.

§. 40.

Will man Brüche in ſolche Reihen aufzulöſen, ſo kann es nach einer gewiſſen mechaniſchen Methode geſchehen, welche wir durch das Beyſpiel des Bruches $\frac{5341}{7837}$ erläutern wollen. Die Figur iſt folgende

5341

Rest	Nenner	Produkt	Quotient
5341	7837	5341	1
— 2496	7837	7488	3
+ 349	7837	7678	22
— 159	7837	7791	49
+ 46	7837	7820	170
— 17	7837	7837	461
		0	

Dieſes giebt nun

$$\frac{5341}{7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{1}{3.22.49.170.461}.$$

Man dividirt nemlich den Nenner durch den Zähler, und ſodann durch jeden Ueberreſt, um die Quotienten 1, 3, 22, 49, 170, 461 zu finden. Nun iſt

$$1 - \frac{2496}{7837} = \frac{5341}{7837}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{349}{3.7837} = \frac{2496}{7837}$$

$$\frac{1}{22} - \frac{159}{22.7837} = \frac{349}{7837}$$

$$\frac{1}{49} - \frac{46}{49.7837} = \frac{159}{7837}$$

$$\frac{1}{170} - \frac{17}{170.7837} = \frac{46}{7837}$$

$$\frac{1}{461} - \frac{0}{461.7837} = \frac{17}{7837}$$

Denn

Denn es ſey der Nenner $= B$, ein jeder Ueberreſt $= Q$, B durch Q getheilt gehe m mal, und laſſe R übrig, ſo iſt

$$mQ = B - R$$

demnach

$$\frac{mQ}{B} = 1 - \frac{R}{B}$$

$$\frac{Q}{B} = \frac{1}{m} - \frac{R}{m.B}$$

Es iſt daher, wenn man nach und nach ſubſtituirt,

$$\frac{5341}{7837} = 1 - \frac{2496}{7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{349}{3.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{159}{3.22.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{46}{3.22.49.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{17}{3.22.49.170.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{1}{3.22.49.170.461}.$$

§. 34.

In dieſem Beyſpiele hat es ſich ſchicklich ereügnet, daß jeder Ueberreſt kleiner als die Hälfte desjenigen war, welcher zum Dividiren genommen worden, und dieſes machte, daß in der herausgebrachten Reihe die Zeichen $- +$ einförmig abwechſelten. Es giebt aber ungleich mehr Brüche, wo die Ueberreſte bald gröſ-

gröſſer, bald kleiner ſind, als die Hälfte der Theiler. Will man nun eine Reihe haben, die am geſchwindeſten convergirt; ſo muß man in allen den Fällen, wo ein Ueberreſt gröſſer ſeyn würde, als die Hälfte des Theilers, den Quotienten um 1 gröſſer nehmen. Dadurch wird der Ueberreſt negativ, und zugleich kleiner als die Hälfte des Theilers, und damit muß das Zeichen verwechſelt werden. Es ſey z. E. der Bruch $\frac{4142136}{10000000}$, ſo haben wir folgende Figur.

```
4142136 | 10000000 | 2
        |  8284272 |
  ---------------------
 — 1715728 | 10000000 | 6
           | 10294368 |
     ----------------------
      — 294368 | 10000000 | 34
               | 10008512 |
         ----------------------
            — 8512 | 10000000 | 1175
                   | 10001600 |
                   ------------
                       — 1600

1600 | 10000000 | 6250
     | 10000000 |
     -------------
            0
```

folglich

$$\frac{4142136}{10000000} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.6} - \frac{1}{2.6.34} - \frac{1}{2.6.34.1175}$$

$$- \frac{1}{2.6.34.1175.6250}$$

Es iſt demnach

$$\sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2.6} - \frac{1}{2.6.34}$$

$$- \frac{1}{2.\,6.\,34.\,1175} - \text{ꝛc.}$$

Da hier von den zweyten an, alle Quotienten um 1 grӧſſer genommen worden, ſo ſind auch alle Zeichen von dem zweyten an — geblieben.

§. 42.

Wiederum es ſey 0,8660254 der Tabellarſinus von 60 Gr. in ſolche Brüche zu verwandeln, ſo iſt

```
8660254 | 10000000 | 1
        |  8660254 |
        ------------
  — 1339746 | 10000000 | 7
            |  9378222 |
            ------------
      + 621778 | 10000000 | 16
               |  9948608 |
               ------------
          — 51392 | 10000000 | 195
                  | 10021440 |
                  ------------
                    — 21440

—21440 | 10000000 | 466
       |  9991040 |
       ------------
   + 8960 | 10000000 | 1116
          |  9999360 |
          ------------
       — 640 | 10000000 | 15625
             | 10000000 |
             ------------
                 0
```

Hier

Hier iſt der einige Quotient 195 um 1 gröſſer genommen worden, demnach iſt auch nur bey deſſen Ueberreſt keine Verwechſelung des Zeichens vorgegangen. Es iſt demnach

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}} = 1 - \tfrac{1}{7} + \frac{1}{7.16} - \frac{1}{7.16.195} - \frac{1}{7.16.195.466}$$
$$+ \frac{1}{7.16.195.466.1116} - \frac{1}{7.16.195.466.1116.15625}$$

hiebey kann man die drey letzten Glieder, als welche kleiner als 0,0000001 ſind, weglaſſen, weil wir den Sinus von 60 Gr. ſelbſt nicht genauer genommen haben.

§. 43.

Auf dieſe Art verfährt man demnach, wenn Brüche oder Decimalreihen in ſolche Reihen

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \&c.$$

aufzulöſen ſind, die am geſchwindeſten convergiren. Will man aber von dieſer Bedingung abgehen, ſo kann jeder Bruch und jede Decimalreihe in unzählige Reihen verwandelt werden, die nach andern Abſichten eingerichtet werden können. Man ſetze z. E. jeder von den Factoren a, b, c, d &c. ſollen eine Zahl aus der Reihe

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 ꝛc.

ſeyn, ſo wird dieſe Abſicht auf eine ganz ähnliche Art erhalten werden können. Wir wollen

len in Anſehung des hyperboliſchen Logarithmus von 10, welcher = 2,302585092994045 68 ꝛc. iſt, ein Beyſpiel geben. Es iſt demnach

$$
\begin{array}{rl}
\log. 10 = & 2,302585092994 \text{ ꝛc.} \\
 & -2,000\,000\,000\,000 \text{ ꝛc.} \\
\hline
A = & +0,302585092994 \text{ ꝛc.} \\
a = \frac{1}{3} = & 0,333333333333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
B = & -30748240339 \text{ ꝛc.} \\
b = \frac{1}{10} a = & 33333333333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
C = & +2585092994 \text{ ꝛc.} \\
c = \frac{1}{10} b = & 3333333333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
D = & -748240339 \text{ ꝛc.} \\
d = \frac{1}{4} c = & 833333333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
E = & +85092994 \text{ ꝛc.} \\
e = \frac{1}{10} d = & 83333333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
F = & +1759660 \text{ ꝛc.} \\
f = \frac{1}{5} e = & 1666666 \text{ ꝛc.} \\
\hline
G = & +92994 \text{ ꝛc.} \\
g = \frac{1}{20} f = & 83333 \text{ ꝛc.} \\
\hline
H = & +9660 \text{ ꝛc.} \\
h = \frac{1}{9} g = & 9259 \text{ ꝛc.} \\
\hline
I = & +401 \text{ ꝛc.} \\
i = \frac{1}{20} h = & 462 \text{ ꝛc.} \\
\hline
K = & -61 \text{ ꝛc.} \\
 & \text{ꝛc.}
\end{array}
$$

folglich

folglich

$$\log. 10 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.10} + \frac{1}{3.10.10} - \frac{1}{3.10.10.4} + \frac{1}{3.10.10.4.10} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20.9} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20.9.20} - \text{ꝛc.}$$

§. 44.

Man kann auf eine ähnliche Art die Auflöſung einer Decimalreihe ſo anſtellen, daß die Nenner oder Factores lauter Quadrat, Cubic ꝛc. Trigonal ꝛc. oder Zahlen aus einer fürgegebenen Reihe ſind. Man wird aber, ungeachtet es an ſich nicht unmöglich iſt, nicht leicht auf eine ſolche Auflöſung verfallen, da die Factores nach einem einförmigen Geſetze auf einander folgen, daferne man dieſes nicht voraus weiß. Denn ſo z. E. giebt es allerdings eine Reyhe, deren Factores der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. ſind; man muß aber voraus wiſſen, daß es die Zahl iſt, deren hyperboliſcher Logarithmus = 1 iſt. Denn ſo hat man

$$
\begin{array}{rl}
 & 2,718281828459 \\
 & 2 \\
\hline
 & 0,718281828459 \\
a = \frac{1}{2}. = & 0.500000000000 \\
\hline
 & 0,218281828459 \\
b = \frac{1}{3}a = & 0,166666666666 \\
\hline
 & 0,051615151793 \\
c = \frac{1}{4}b = & 41666666666 \\
\hline
 & 0,009948485126 \\
d = \frac{1}{5}c = & 0,008333333333 \\
\hline
 & 0,001615151793 \\
 & \text{rc.}
\end{array}
$$

§. 45.

Bey dieſen ſo gar vielen Möglichkeiten die Decimalreihen und Brüche in Reihen zu verwandeln, welche entweder unter allen am geſchwindeſten, oder doch nach beliebigen Geſetzen, ſehr geſchwinde convergiren, wäre es ſehr zu wünſchen, daß die dabey gebrauchte Methode auch bey den algebraiſchen unendlichen Reihen mit eben ſo gutem Fortgange angebracht werden könnte. Man weiß, daß wenn man mit dem Integriren einer Differentialformel nicht fortkommen kann, das letzte Mittel dieſes iſt, daß man ſie in eine unendliche Reihe auflöſet, und ſodann jede Glieder derſelben beſonders integrirt. Es geſchieht aber ſelten, daß ſolche Reihen in allen Fällen ſehr convergent wären, und um deſtomehr wäre es gut, ſie in ſolche ver-

verwandeln zu können, die unter allen am geſchwindeſten convergirten. Will man aber mit ſolchen Reihen Diviſionen vornehmen, wie wir es vorhin (§. 40.) mit den Brüchen gethan haben, ſo kann man ſich dabey weder von dem gröſten Quotienten, noch von dem kleinſten Ueberreſte verſichern, weil ſich die Glieder, die verſchiedene Exponenten haben, nicht ſo unbedingt addiren und ſubtrahiren laſſen. Man kann dabey nur die Glieder, ſo gleiche Exponenten haben, mit einander vergleichen, und man hat bey dem Dividiren nur dieſe Wahl, ob die Quotienten aus 1, 2, 3 ꝛc. Gliedern beſtehen ſollen. Die Probe, ſo ich hierüber angeſtellt, hat mich gelehrt, daß, wenn man ſich mit eingliedrigen Quotienten begnügen will, man nichts ausrichtet, weil man ſtatt einer mehr convergirenden Reihe gerade diejenige wieder bekömmt, die man hatte verwandeln wollen. Es ſey z. E. die Reihe

$$y = \frac{ax + bx^2 + cx^3 + \&c.}{1}$$

in Form eines Bruches vorgeſtellt deſſen Nenner $= 1$ iſt. Dividirt man nun 1 durch $ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$ ſo iſt der Quotient $= \frac{1}{ax}$ der Ueberreſt $= -\left(\frac{bx}{a} + \frac{cx^2}{a} + \frac{dx^3}{a} + \&c.\right)$ Wird durch dieſen Ueberreſt wiederum 1 dividirt, ſo iſt der Quotient $= -\frac{a}{bx}$, der Ueber-

reſt $= -\left(\frac{cx}{b} + \frac{dx^2}{b} + \&c.\right)$ Fährt man auf gleiche Art fort, ſo werden der Ordnung nach die Quotienten $\frac{1}{ax}, -\frac{a}{bx}, -\frac{b}{cx}, -\frac{c}{dx}$ &c. erhalten. Und dieſe geben demnach die Reihe

$$y = ax + ax.\frac{bx}{a} + ax.\frac{bx}{a}.\frac{cx}{b} + ax.\frac{bx}{a}.\frac{cx}{b}.\frac{dx}{c} + \text{ꝛc.}$$

welcher ſich offenbar in die fürgegebene

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$$

verwandelt. Es ſind demnach die auf dieſe Art gefundene eingliedrige Quotienten nicht nur nicht die Gröſten, ſondern weder gröſſer noch kleiner als diejenigen, welche die Anfangs fürgegebene Reihe wieder herfür bringen.

§. 46.

Ich habe hierauf eine Probe mit Quotienten von zweyen Gliedern vorgenommen, weil es ſich voraus ſehen lieſſe, daß dieſe allerdings gröſſer als die eingliedrigen ſeyn, und ſich nicht gegen einander wieder aufheben würden. Ich nahm zu dieſem Ende die Leibnitziſche Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \text{ꝛc.}$$

dieſe in 1 dividirt, gieng $\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{3}\right)$mal, und der Ueberreſt wäre

$$-\frac{4}{45}x^4 + \frac{8}{105}x^6 - \frac{12}{189}x^8 + \frac{16}{297}x^{10} - \frac{20}{13.33}x^{12} + \text{ꝛc.}$$

dieſer

Digitized by Google

dieſer wiederum in 1 dividirt gieng $\div\left(\frac{45}{4\,xxxx} + \frac{135}{14\,xx}\right)$mal, und der Ueberreſt war

$$+\frac{1}{49}x^4 - \frac{10}{33.49}x^6 - \frac{5}{7.11.13}x^8 + \frac{12}{7.11.13}x^{10}\ \&c.$$

dieſer nochmals in 1 dividirt, gabe $\left(\frac{49}{x^4} + \frac{49.10}{33x^2}\right)$, und der Ueberreſt war

$$+\frac{953.5}{11.13.99}x^4 - \frac{173}{11.13.33}x^6\ \&c.$$

Dadurch erhielte ich nun nach gehöriger Reduction der Quotienten

$$y = \frac{3x}{3+xx} + \frac{3x}{3+xx}.\frac{56x^4}{630+540x^2} - \frac{3x}{3+xx}.\frac{56x^4}{630+540\,xx}.\frac{33x^4}{1617+490\,xx}$$

oder nach geſchehener Verkleinerung der Brüche

$$y = \frac{3x}{3+xx} + \frac{1}{(3+xx)}.\frac{28\,x^5}{(105+90\,xx)} - \frac{44x^9}{(3+xx).(35+30\,xx).(231+70\,xx)}\ \text{ꝛc.}$$

Dieſe Reihe convergiret demnach ſchon merklicher, als die fürgegebene. Setzt man z. E. $x=1$, ſo erhält man

$$y = \tfrac{3}{3} + \tfrac{7}{195} - \tfrac{11}{19565} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man $x = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, ſo findet ſichs

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\tfrac{9}{10} + \tfrac{14}{2025} - \tfrac{22}{1545075} + \text{ꝛc.}\right)$$

Setzt man $x=2$, ſo iſt

$$y = \tfrac{6}{7} + \tfrac{128}{465} - \tfrac{22528}{544435} + \text{ꝛc.}$$

 wor-

woraus man ſieht, daß dieſe Reihe auch in denen Fällen noch convergirend bleibt, in welchen die Leibnitziſche divergent wird.

§. 47.

Eben dieſe Probe mit Quotienten von drey Gliedern fiel ſo aus. Die Reihe $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7} + x^7 +$ ꝛc. in 1 dividirt, gieng $(1:x + \frac{1}{3}x - \frac{4}{45}x^3)$mal, und der Ueberreſt war

$$+ \frac{44}{27\cdot 35} + x^6 - \frac{8}{7\cdot 25}x^8 + \frac{428}{9\cdot 33\cdot 35}x^{10} \text{ ꝛc.}$$

dieſer Ueberreſt wiederum in 1 getheilt, gieng

$$\frac{27\cdot 35}{44\,x^6} + \frac{27\cdot 27\cdot 7}{11.11.2.x^4} + \frac{241.3.7.9}{121.44.5\,x^2}$$

mal ꝛc. Demnach wenn man dieſe Brüche unter einen gemeinen Nenner bringt; ſo war der erſte Quotient $= \frac{45 + 15x^2 - 4x^4}{45x}$

der zweyte $= \frac{571725 + 561330x^2 + 45549x^4}{26620x^6}$ ꝛc.

Demnach haben wir

$$y = \frac{45x}{45 + 15x^2 - 4x^4} - \frac{45x}{45 + 15x^2 - 4x^4 .}$$

$$\frac{26620x^6}{571725 + 561330x^2 + 45549x^4 .}$$

§. 48.

Um nun dieſe Reihe mit der vorhergehenden (§. 46.) zu vergleichen, ſo bemerke ich, daß mehr nicht als die ſechs erſten Glieder der Leibnitziſchen

nitziſchen Reihe

$$z - \tfrac{1}{3}z^2 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9}z^9 - \tfrac{1}{11}z^{11}$$

gebraucht worden, um bey der Reihe des §. 46. die drey erſten, bey der Reihe des §. 47. die zwey erſten Glieder heraus zu bringen. Denn weiter wolte ich die Rechnung ohnehin nicht verfolgen, weil dieſes ſchon genug war, um zu ſehen, wiefern die beyden heraus gebrachten Reihen convergiren würden. Ich ſetzte demnach $x = \frac{1}{2}$, und die drey erſten Glieder der Reihe des §. 46. gaben

$$\frac{6}{13} + \frac{7}{3315} + \frac{11}{4393480} = 0,4636475717\ldots$$

hingegen die zwey erſten Glieder der Reihe des §. 47. gaben

$$\frac{45}{97} - \frac{33275}{123281277} = 0,4636476145\ldots$$

Nun aber iſt die Länge des Bogens, deſſen Tangente $= \frac{1}{2}$ iſt,

$$y = 0,4636476056\ldots$$

demnach iſt der erſte Ausdruck um 0,000 000 0339... zu klein, der andere aber um 0,000 000 0089 zu groß. Man ſieht hieraus, daß beyde Reihen beträchtlich convergiren; für $x = 1$, geben die drey erſten Glieder (§. 46)

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{195} - \tfrac{11}{19565} = 0,7853352$$

die zwey erſten Glieder (§. 47.)

$$\tfrac{45}{56} - \tfrac{33275}{1833364} = 0,7854217$$

Nun iſt der Bogen ſelbſt $y = 0,7853982$ —
demnach iſt der erſte Ausdruck um 0,0000629

zu klein, der andere aber um 0,0000235 zu groß. Man hätte von der Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\,\frac{1}{11} + \text{ꝛc.}$$

eine beträchtliche Anzahl von Gliedern addiren müſſen, um den Bogen ſo weit zu finden, daß der Fehler kleiner als 0,0001 geweſen wäre.

§. 49.

Da übrigens der Unterſchied zwiſchen beyden Methoden nicht ſehr groß iſt, ſo werden wir bey den zweygliedrigen Quotienten bleiben, und dafür eine allgemeine Formel ſuchen, woraus ſich ſodann die Bedingungen ergeben, unter welchen die dadurch herausgebrachte Reihe am meiſten convergirt. Es ſey demnach die Reihe

$$y = ax^m + bx^{m+n} + cx^{m+2n} + dx^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

Wird dieſe in 1 dividirt, ſo iſt der Quotient

$$= \frac{1}{ax^m} - \frac{bx^n}{aax^m} = \frac{a - bx^n}{aax^m}$$

und der Ueberreſt

$$= \frac{bb - ca}{aa} x^{2n} + \frac{bc - da}{aa} x^{3n} + \frac{bd - ea}{aa} x^{4n} + \frac{be - fa}{aa} x^{5n} + \text{\&c.}$$

für dieſen ſetze man Kürze halber

$$Ax^{2n} + Bx^{3n} + Cx^{4n} + Dx^{5n} + \text{\&c.}$$

Dividirt man nun wiederum 1 durch dieſen Ueberreſt, ſo iſt der zweyte Quotient

=

Digitized by Google

$$=\frac{1}{Ax^{2n}}-\frac{Bx^n}{AAx^{2n}}=\frac{A-Bx^n}{AAx^{2n}}$$

und der zweyte Ueberreſt

$$=\frac{BB-CA}{AA}x^{2n}+\frac{BC-DA}{AA}x^{3n}+$$

$$\frac{BD-EA}{AA}x^{4n}+\&c.$$

Setzt man dieſen ebenfalls Kürze halber

$$=\alpha x^{2n}+\beta x^{3n}+\gamma x^{4n}+\delta x^{5n}+\&c.$$

und nimmt die dritte Diviſion vor, ſo wird wiederum der Quotient

$$=\frac{1}{\alpha x^{2n}}-\frac{\beta x^n}{AAx^{2n}}=\frac{\alpha-\beta x^n}{\alpha\alpha x^{2n}}$$

und der Ueberreſt

$$=\frac{\beta\beta-\gamma\alpha}{\alpha\alpha}x^{2n}+\frac{\beta\gamma-\delta\alpha}{\alpha\alpha}x^{3n}+\frac{\beta\delta-\varepsilon\alpha}{\alpha\alpha}x^{4n}+\text{ꝛc.}$$

ſeyn ꝛc. Da auf dieſe Art jede folgende Quotienten und Ueberreſte einerley Form haben, ſo ſieht man, wie ſie, ohne in jeden beſondern Fällen die Diviſion vorzunehmen, vermittelſt dieſer Formeln aus einander hergeleitet und berechnet werden können. Wir haben demnach ſtatt der fürgegebenen Reihe, folgende

$$y=\frac{aax^m}{a-bx^n}-\frac{aax^m}{a-bx^n}\cdot\frac{AAx^{2n}}{A-Bx^n}+$$

$$\frac{aax^m}{a-bx^n}\cdot\frac{AAx^{2n}}{A-Bx^n}\cdot\frac{\alpha\alpha x^{2n}}{\alpha-\beta x^n}-\&c.$$

§. 50.

Dieſe Reihe wird nun offenbar abgebrochen, und in einem endlichen Ausdruck verwandelt, wenn einer von den Factoren A, α &c. $= 0$ wird. Man ſetze z. E. $A = 0$. Da nun

$$A = \frac{bb - ca}{aa}$$

iſt, ſo iſt $bb - ca = 0$,
folglich $a : b = b : c$.
Wenn demnach in der fürgegebenen Reihe

$$y = ax^m + bx^{m+n} + cx^{m+2n} + \&c.$$

die Coefficienten a, b, c, d &c. entweder gleich ſind, oder überhaupt in einer geometriſchen Progreſſion fortgehen, ſo wird $A = 0$ &c. und man hat ſchlechthin

$$y = \frac{aax^m}{a - bx^n}$$

In der That giebt auch dieſer Ausdruck, wenn man ihn in eine Reihe auflöſt, eine geometriſche Progreſſion. Wir können hieraus die Folge ziehen, daß die herausgebrachte Reihe deſtomehr convergirt, jemehr die Coefficienten a, b, c, d &c. entweder der Gleichheit, oder einer jeden geometriſchen Progreſſion nahe kommen.

§. 51.

Setzt man ferner $\alpha = 0$, ſo erhellet auf eben dieſe Art, daß

$$A : B = B : C$$

ſey; folglich wird die Formel bey dem zweyten Gliede

Digitized by Google

Gliede abgebrochen, wenn die Coefficienten des erſten Ueberreſtes entweder einander gleich ſind, oder in einer geometriſchen Progreſſion fortgehen. Ein gleiches hat auch für jeden folgenden Ueberreſt ſtatt.

§. 52.

Nun ſind die meiſten von denen Reihen, die langſamer convergiren, von der Art, daß die Coefficienten a, b, c, d &c. immer weniger von einander unterſchieden ſind. Wenn man daher die erſten Glieder ſolcher Reihen für ſich addirt, und die folgenden nach der erſt angegebenen Methode behandelt, ſo wird man ungleich geſchwinder dem wahren Werthe der Reihe näher kommen, als wenn man bey den erſten Gliedern angefangen hätte. Wir wollen dieſes ebenfalls durch das Beyſpiel der Leibnitziſchen Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \text{ꝛc.}$$

erläutern. Nimmt man von dieſer die fünf erſten Glieder beſonders, ſo ſind die folgenden

$$-\left(\tfrac{1}{11}x^{11} - \tfrac{1}{13}x^{13} + \tfrac{1}{15}x^{15} - \tfrac{1}{17}x^{17} + \tfrac{1}{19}x^{19} - \tfrac{1}{21}x^{21} + \text{ꝛc.}\right)$$

demnach

$$a = +\frac{1}{11} \qquad b = -\frac{1}{13} \qquad m = 11$$

$$c = +\frac{1}{15} \qquad d = -\frac{1}{17} \qquad n = 2$$

$$e = +\frac{1}{19} \qquad f = -\frac{1}{21}$$

&c.

Dieſe

Dieſe Werthe in den Formeln des §. 49. geſetzt, geben den erſten Quotienten

$$= + \frac{11(13+11x^2)}{13x^{11}}$$

und den erſten Ueberreſt

$$-\frac{11.4}{13.13.15}x^4+\frac{11.8}{13.15.17}x^6-\frac{11.12}{13.17.19}x^8+\frac{11.16}{13.19.21}x^{10}-\text{ꝛc.}$$

demnach

$$A = -\frac{11.4}{13.13.15} \qquad B = +\frac{11.8}{13.15.17}$$

$$C = -\frac{11.12}{13.17.19} \qquad D = +\frac{11.16}{13.19.21}.$$

ꝛc.

Hieraus erhält man den zweyten Quotienten

$$= -\frac{15.13.13(17+2.13x^2)}{4.11.17.x^4}$$

und den zweyten Ueberreſt

$$+\frac{13.223}{17.17.19}x^4-\frac{13.15.482}{17.17.19.21}x^6+\text{ꝛc.}$$

demnach

$$\alpha = \frac{13.223}{17.17.19} \qquad \beta = -\frac{13.15.482}{17.17.19.21}$$

ꝛc.

welches den dritten Quotienten

$$= + \frac{17.17.19.(1561+2410x^2)}{7.13.223.223.}$$

giebt ꝛc.

giebt ꝛc. Demnach haben wir

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \frac{13\,x^{11}}{143+121\,xx}$$

$$- \frac{13.x^{11}}{(143+121\,x^2)} \cdot \frac{4.\,11.\,17.\,x^4}{15.\,13.\,13\,(17+26\,xx)}$$

$$+ \frac{13.x^{11}}{143+121\,xx} \cdot \frac{4.\,11.\,17.\,x^4}{15.\,13.\,13\,(17+26\,x^2)}$$

$$\frac{7.\,13.\,223.\,223.\,x^4}{17.\,17.\,19.\,(1561+2410\,xx)} - \text{ꝛc.}$$

Dieſe Glieder geben, wenn man $x = 1$ ſetzt, für den halben Quadranten 0, 785399582 ꝛc. welches von dem wahren Werthe nur um 0, 0000014 verſchieden iſt.

§. 53.

Bey der Reihe

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \tfrac{7}{256}x^5 - \tfrac{21}{1024}x^6 + \tfrac{33}{2048}x^7 - \text{ꝛc.}$$

kann man bey dem zweyten Gliede anfangen, weil von dieſem an die Zeichen ordentlich abwechſeln. Und ſo wird man

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{2x}{4+x} + \mathfrak{A}.\frac{xx}{16+12x} - \mathfrak{B}.\frac{xxx}{64+96x}$$

$$+ \mathfrak{C}.\frac{81.xx}{16(9+13x)} - \mathfrak{D}.\frac{625.\,625.\,xx}{16.\,81\,(625+807\,x)}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

erhalten, wobey Kürze halber die Factores A, B, C, D ꝛc. die nächſt vorhergehenden Glieder bedeu-

bedeuten, und B deswegen mit xxx multiplicirt iſt, weil es ſich hier zuträgt, daß bey der zweyten Diviſion das erſte Glied des Ueberreſtes = 0 wird. Dieſe Reihe iſt zur Ausziehung der Quadratwurzel ſehr bequem. Es ſolle z. E. aus 2916 die Quadratwurzel ausgezogen werden, welche = 54 iſt. Wir wollen dafür 53 nehmen, und ſo läßt das Quadrat von 53 = 2809 von 2916 abgezogen, 107 übrig. Demnach haben wir

$$53\sqrt{\left(1+\frac{107}{2890}\right)} = 53\sqrt{(1+x)}$$

und damit die Reihe

$$\sqrt{(2916)} = 53\left(1+\frac{214}{11343}+\frac{214}{11343}\cdot\frac{11449}{2809.\ 36228} \text{ ꝛc.}\right)$$

Da nun hier ſchon das dritte Glied kleiner als $\frac{1}{6000000}$, das vierte aber noch

$$1 : \left(\frac{107}{2890}\right)^3 \cdot \frac{1}{64+\frac{96.\ 107}{2890}}$$

mal, das iſt über 1500000 mal kleiner iſt, ſo ſieht man leicht, daß man es mehrentheils bey den zwey erſten Gliedern der Reihe

$$\sqrt{(1+x)} = 1+\frac{2x}{4+x}$$

kann bewenden laſſen.

§. 54.

Für die Cubicwurzel findet man auf eine ähnliche Art

$\sqrt[3]{(1}$

$$\sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{x}{3+x} + A.\frac{4xx}{9(6+5x)} - B.\frac{xx}{4(9+4x)} + \text{ꝛc.}$$

und für jede Wurzel überhaupt

$$(1+x)^n = 1 + \frac{2nx}{2-(n-1)x} - \frac{(n-1)(n+1)x^2.A}{12-6(n-2)x} + \frac{(2n-1)^2.(n-2)x^2.B}{60(2n-1)-(n-3).(5n-2).10.x} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man in dieſer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{2}$, welches für die Quadratwurzel iſt, ſo wird das dritte Glied $= 0$, und eben ſo auch die folgende Glieder. Wir haben aber ſchon in den vorhergehenden §. angezeigt, woher dieſes komme, und wie das dritte und die folgende Glieder für die Quadratwurzel müſſen gefunden werden.

§. 55.

Bey allen dieſen Reihen werden die Binomialfactoren, durch deren Multiplication die Glieder derſelben entſtehen, einander mehrentheils ungleich, und zuweilen, wie in dem Beyſpiele des §. 53. unähnlich. Ich habe daher eine andere Methode geſucht, bey welcher dieſe Ungleichheit wegbliebe, und die Reihe eben dadurch einförmiger würde. Dieſe werde ich ſo gleich herſetzen, und hier nur noch anmerken, daß, wenn bey der erſt angeführten die fürgegebene

gebene Reihe endlich iſt, auch diejenige endlich werde, in welche jene nach dieſer Methode verwandelt wird.

§. 56.

Es ſey nun die Reihe

$$y = x^m - a x^{m+n} + b x^{m+2n} - c x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

bey welcher wir ſetzen, daß die Coefficienten a, b, c &c. immer langſamer abnehmen. Man ſetze

$$1 + x^n = z$$

ſo iſt

$$\begin{array}{l} yz = x^m - a x^{m+n} + b x^{m+2n} - c x^{m+3n} + \text{ꝛc.} \\ \qquad\qquad + 1 \ldots \quad - a \ldots \quad + b \ldots \end{array}$$

demnach

$$yz - x^m = (1-a) x^{m+n} - (a-b) x^{m+2n} + (b-c) x^{m+3n} - \text{ꝛc.}$$

Da dieſe Reihe der fürgegebenen ähnlich iſt, ſo leidet ſie eben die Verwandlung, und damit iſt

$$yz^2 - x^m z - (1-a) x^{m+n} = (1-2a+b) x^{m+2n} - (a-2b+c) x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

Auf eben die Art wiederum

$$yz^3 - x^m z^2 - (1-a) x^{m+n} z - (1-2a+b) x^{m+2n} = (1-3a+3b-c) x^{m+3n} - \text{ꝛc.}$$

Fährt man auf dieſe Art immer fort, ſo erhält man nach λ Wiederholungen

Digitized by Google

$$yz^{\lambda} - x^{m} z^{\lambda-1} - (1-a)x^{m+n} z^{\lambda-2} - (1-2a+b)x^{m+2n} z^{\lambda-3} + \&c.$$

$$= (1 + \lambda a - \lambda.\frac{\lambda-1}{2}.b + \lambda.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda-2}{3}c - \&c.)x^{m+\lambda n} - \&c.$$

Und demnach, wenn man alles durch z^{λ} dividirt

$$y - \frac{x^{m}}{z} - \frac{(1-a)x^{m+n}}{zz} - \frac{(1-2a+b)x^{m+2n}}{z^{3}} + \&c. \ldots$$

$$= (1 + \lambda a - \lambda.\frac{\lambda-1}{z}.b + \&c.)\frac{x^{m+\lambda n}}{z^{\lambda}} - \&c.$$

Iſt nun x poſitiv, ſo iſt

$$z = (1 + x^{n}) > x^{n}$$

demnach

$$z^{\lambda} > x^{n\lambda}$$

Daher wird der Bruch

$$\frac{x^{m}.x^{n\lambda}}{z^{\lambda}}$$

in geometriſcher Progreſſion kleiner, je gröſſer λ wird, und folglich $= 0$, wenn man $\lambda = \infty$ ſetzt. Wir ſetzen dieſes und haben demnach

$$0 = y - x^{m} : z - (1-a)x^{m+n} : z^{2} - (1-2a+b)x^{m+2n} : z^{3} - (1-3a+3b-c)x^{m+3n} : z^{4} - \&c.$$

eine unendliche Reihe, welche ſich, wenn man für z deſſen Werth $1+x^n$ ſetzt, in

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(1+(1-a)\frac{x^n}{1+x^n}+(1-2a+b).\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2+(1-3a+3b-c).\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3+ \text{ꝛc.}\right)$$

verwandelt. Und dieſes iſt die Reihe, welche wir ſuchen wolten. Man ſieht zugleich, daß ſie ſehr einförmig iſt, und daß die Coefficienten

$$1-a$$
$$1-2a+b$$
$$1-3a+3b-c$$
$$1-4a+6b-4c+d$$

ꝛc.

die erſten, zweyten, dritten und jede folgenden Differenzen der Coefficienten a, b, c, d &c. der fürgegebenen Reihe ſind.

§. 57.

Um ein ſehr allgemeines Beyſpiel hievon zu geben, ſo ſey die Reihe

$$y = \frac{c}{a}x^m - \frac{c+d}{a+b}x^{m+n} + \frac{c+2d}{a+2b}x^{m+2n} - \frac{c+3d}{a+3b}x^{n+3m} - \text{\&c.}$$

wobey ſowohl die Zähler als Nenner in arithmetiſcher Progreſſion fortgehen. Vergleicht man dieſe Reihe mit der Reihe (§. 56.)

$$y = ax^m - bx^{m+n} + cx^{m+2n} + \text{\&c.}$$

und

und nimmt die erſten, zweyten, dritten und jede folgenden Differenzen, ſo erhält man die Reihe

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{c}{a} + \frac{cb-ad}{a(a+b)}.\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{(cb-ad).2b}{a.(a+b).(a+2b)}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \frac{(cb-ad).2b.3b}{a.(a+b).(a+2b).(a+3b)}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3 + \text{ꝛc.}\right)$$

welche nach einem ſehr einfachen Geſetze fortgeht. Hier ſind nun einige beſondere Fälle.

§. 58.

Es ſey

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{2a}x^{m+n} + \frac{1}{3a}x^{m+2n} - \&c.$$

ſo iſt $c=1$, $d=0$, $a=b$, demnach

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a}.\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1}{3a}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \frac{1}{4a}.\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3 + \&c.\right)$$

Setzt man hier $a=m=n=1$, ſo iſt

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \text{ꝛc.} = \log.(1+x)$$

und

$$y = \frac{x}{1+x} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \&c. = \log.(1+x).$$

§. 59.

Es ſey

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{a+b}x^{m+n} + \frac{1}{a+2b}x^{m+2n} - \text{ꝛc.}$$

ſo iſt $c = 1$, $d = 0$, demnach

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+b)}\cdot\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{b.\,2b}{a(a+b).(a+2b)}\cdot\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \text{ꝛc.}\right)$$

Setzt man hier $n = 2$, $b = 2$, ſo iſt

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{a+2}x^{m+2} + \frac{1}{a+4}x^{m+4} - \text{ꝛc.}$$

und

$$y = \frac{x^m}{1+xx}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a(a+2)}\left(\frac{xx}{1+xx}\right) + \frac{2.\,4}{a(a+2).(a+4)}\left(\frac{xx}{1+xx}\right)^2 + \text{ꝛc.}\right)$$

Von dieſen beyden Reihen iſt erſtere ein Stück der Leibnitziſchen, ſobald man für a und m eine gleiche ungerade Zahl ſetzt. Man mache z. E. $a = m = 21$, und $x = 1$, ſo erhält man

$$y = \tfrac{1}{21}x^{21} - \tfrac{1}{23}x^{23} + \tfrac{1}{25}x^{25} - \tfrac{1}{27}x^{27} + \text{ꝛc.}$$

und

$$y = \tfrac{1}{42}\left(1 + \tfrac{1}{23} + \frac{1.\,2}{23.\,25} + \frac{1.\,2.\,3}{23.\,25.\,27} + \frac{1.\,2.\,3.\,4}{23.\,25.\,27.\,29} + \text{ꝛc.}\right)$$

IV.

IV.

Algebraiſche Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden.

§. 1.

In den Anfangsgründen der Trigonometrie wird die Verfertigung der trigonometriſchen Tafeln gewöhnlich ſo angegeben, wie ſie ſich aus der Elementargeometrie begreiflich machen läßt, und wie dieſe Tafeln in der That anfangs verfertigt worden. Man kann nemlich vermittelſt des Circuls und Lineales den Circul in 2, 3, 4, 5 gleiche Theile theilen, und jeden Bogen, ſo vielmal man will, halbiren. Daraus läßt ſich ſodann herleiten, wie ſich der Circul von 3 zu 3 Graden, oder von 45 zu 45 Min. oder von 675 zu 675 Secunden eintheilen, und die Sinus, Tangenten und Secanten von allen dieſen Bögen berechnen laſſen. Dieſe Berechnungsart iſt ungemein weitläuftig. Man hat daher ſeit der Erfindung der Infiniteſimalrechnung auf Mittel gedacht, ſie abzukürzen, und jede Sinus, Tangenten und Secanten für ſich zu finden, ohne daß ſie erſt aus einander hergeleitet werden müſten. Dazu müſten nun allerdings unendliche Reihen gebraucht

braucht werden, dafern man nicht bey den imaginairen Formeln, die Herr Joh. Bernoulli zuerſt gefunden, ſtehen bleiben wollte, als welche, wenn man ſie nicht in unendliche Reihen verwandelt, fürnemlich nur zu Erfindung von Lehrſätzen dienen.

§. 2.

Will man aber für die Sinus und Tangenten algebraiſche Formeln haben, die weder imaginair ſind, noch aus unendlich vielen Gliedern beſtehen, ſo bleibt man eben ſo zurücke, wie die erſten Berechner der trigonometriſchen Tafeln, weil man ſie ebenfalls nur von 3 zu 3 Graden berechnen kann, und die dazwiſchen fallenden, durch fortgeſetztes Halbiren, finden muß. Da mir ſolche Formeln noch nicht vorgekommen, ſo unterzog ich mich der Arbeit ſie zu finden, um ausführlich zu ſehen, auf welche Art die Sinus von 3 zu 3 Graden mehr oder minder irrational ſind. Folgende Tabelle ſtellt ſie mit einem Anblicke vor Augen.

Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden.

$$\sin. 3^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin. 6^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{5} - \tfrac{1}{8}$$

$$\sin. 9^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

Digitized by Google

ſin. $12^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3}$

ſin. $15^\circ = \sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}}$

ſin. $18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$

ſin. $21^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

ſin. $24^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

ſin. $27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $30^\circ = \frac{1}{2}$

ſin. $33^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$

ſin. $36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

ſin. $39^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $42^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}$

ſin. $45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $48^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{15} - \frac{1}{8}\sqrt{3}$

ſin. $51^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}$

ſin. $57^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$

ſin. $60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ſin. $63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\sin. 66^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})}+\tfrac{1}{8}\sqrt{5}+\tfrac{1}{8}$$
$$\sin. 69^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})}+\tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$+\tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}}+\tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\tfrac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$
$$\sin. 72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$$
$$\sin. 75^\circ = \sqrt{\tfrac{3}{8}}+\sqrt{\tfrac{1}{8}}$$
$$\sin. 78^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})}+\tfrac{1}{8}\sqrt{5}-\tfrac{1}{8}$$
$$\sin. 81^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$
$$\sin. 84^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{15}+\tfrac{1}{8}\sqrt{3}+\tfrac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$$
$$\sin. 87^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})}+\tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}}-\tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}}$$
$$+\tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})}-\tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}}+\tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$
$$\sin. 90^\circ = 1.$$

§. 3.

Bey der Berechnung dieſer Formeln legte ich die Sinus von 45, 30, 18 Graden zum Grunde, weil von dieſen, jeder für ſich, aus der Elementargeometrie gefunden werden muß. Die übrigen Formeln fanden ſich ſodann aus den bekannten zween Lehrſätzen

$$\sin.(x+y) = \sin.x.\ \cos.y + \cos.x.\ \sin.y$$
$$\sin.(x-y) = \sin.x.\ \cos.y - \cos.x.\ \sin.y.$$

Sie müßten aber nach einer gewiſſen Ordnung gefunden werden, damit man aller Reductionen überhoben ſeyn könne. Die Ordnung, ſo ich dabey beobachtet, iſt folgende:

I°. $\sin. 60^\circ = \cos. 30 = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$

II°. $\sin. 75^\circ = \sin.(45+30)$

$\sin. 15^\circ = \sin.(45-30)$

III°. $\sin. 72^\circ = \cos. 18^\circ$

IV°.

IV°. $\text{ſin.}\,54^\circ = \text{ſin.}(72 - 18)$
$\text{ſin.}\,36^\circ = \text{coſ.}\,54^\circ = \text{ſin.}(2.18)$
V°. $\text{ſin.}\,12^\circ = \text{ſin.}(30 - 18)$
$\text{ſin.}\,48^\circ = \text{ſin.}(30 + 18)$
$\text{ſin.}\,24^\circ = \text{ſin.}(54 - 30)$
$\text{ſin.}\,84^\circ = \text{ſin.}(54 + 30)$
$\text{ſin.}\,\;6^\circ = \text{ſin.}(36 - 30)$
$\text{ſin.}\,66^\circ = \text{ſin.}(36 + 30)$
$\text{ſin.}\,42^\circ = \text{ſin.}(72 - 30)$
$\text{ſin.}\,78^\circ = \text{ſin.}\,102^\circ = \text{ſin.}(72 + 30)$
VI°. $\text{ſin.}\,81^\circ = \text{ſin.}\,99^\circ = \text{ſin.}(54 + 45)$
$\text{ſin.}\,\;9^\circ = \text{ſin.}(54 - 45)$
$\text{ſin.}\,63^\circ = \text{ſin.}\,117^\circ = \text{ſin.}(72 + 45)$
$= \text{ſin.}(45 + 18)$
$\text{ſin.}\,27^\circ = \text{ſin.}(72 - 45) = \text{ſin.}(45 - 18)$
VII°. $\text{ſin.}\,\;3^\circ = \text{ſin.}(48 - 45)$
$\text{ſin.}\,87^\circ = \text{ſin.}\,93^\circ = \text{ſin.}(48 + 45)$
$\text{ſin.}\,21^\circ = \text{ſin.}(45 - 24)$
$\text{ſin.}\,69^\circ = \text{ſin.}(45 + 24)$
$\text{ſin.}\,33^\circ = \text{ſin.}(45 - 12)$
$\text{ſin.}\,57^\circ = \text{ſin.}(45 + 12)$
$\text{ſin.}\,39^\circ = \text{ſin.}(45 - 6)$
$\text{ſin.}\,51^\circ = \text{ſin.}(45 + 6)$.

§. 4.

In eben dieſer Ordnung werden auch die Formeln ſelbſt zuſammengeſetzter. Vergleicht man ſie miteinander, in Abſicht auf die Irrationalität, ſo findet ſich, daß ſie aus 15 verſchiedenen Arten von Wurzelgröſſen zuſammengeſetzt ſind, und daß ſie ſich, wenn man einmal

dieſe gefunden, durch bloßes Addiren und Subtrahiren berechnen laſſen. Die Wurzelgröſſen ſind

	$\sqrt{(1:2)}$	$\sqrt{(5+\sqrt{5})}$	$\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{(3:2)}$	$\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$	$\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{(5:2)}$	$\sqrt{(15+3\sqrt{5})}$	$\sqrt{(15-3\sqrt{5})}$
$\sqrt{15}$	$\sqrt{(15:2)}$	$\sqrt{(30+6\sqrt{5})}$	$\sqrt{(30-6\sqrt{5})}$

§. 5.

Weiter geht nun die Elementargeometrie nicht, als daß ſie noch Mittel giebt, durch fortgeſetztes Halbiren, die Sinus für kleinere Bögen zu finden. Die einfachſte Art, dieſes durch Rechnung zu verrichten, geben folgende beyden Formeln an

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\text{ſin.}\,y)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\text{ſin.}\,y)}$$

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\text{ſin.}\,y)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\text{ſin.}\,y)}$$

welche durch die Auflöſung der Gleichung

$$\text{ſin.}\,y = 2\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}y\,.\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}y$$

leicht gefunden werden. Werden dieſe beyde Formeln addirt und ſubtrahirt, ſo erhält man

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}y + \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}y = \sqrt{(1+\text{ſin.}\,y)}$$

$$\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}y + \text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}y = \sqrt{(1-\text{ſin.}\,y)}$$

Multiplicirt man dieſe mit

$$\text{ſin.}\,45^\circ = \text{coſ.}\,45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ſo iſt

$$\text{ſin.}\,45^\circ.\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}y + \text{coſ.}\,45^\circ.\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left(\frac{1+\text{ſin.}\,y}{2}\right)}$$

$$\text{ſin.}\,45^\circ.\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}y - \text{coſ.}\,45^\circ.\,\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left(\frac{1-\text{ſin.}\,y}{2}\right)}$$

dem-

Digitized by Google

demnach $\text{ſin.}(45° + \tfrac{1}{2} y) = \sqrt{\left(\frac{1 + \text{ſin.} y}{2}\right)}$

$$\text{ſin.}(45° - \tfrac{1}{2} y) = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{ſin.} y}{2}\right)}$$

§. 6.

Aus den vorhin angeführten Formeln laſſen ſich noch einige ſpeciale trigonometriſche Lehrſätze herleiten, wenn man ſie unter einander vergleicht. So z. E. iſt

$\text{ſin.} 75° - \text{ſin.} 15° = 2\sqrt{\tfrac{1}{8}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \text{ſin.} 45°$

$\text{ſin.} 75° . \text{ſin.} 15° = \tfrac{1}{4}$

$\text{tang.} 15° = 2 - \sqrt{3} = 2 - \text{tang.} 60°$

$\text{tang.} 75° = 2 + \sqrt{3} = 2 + \text{tang.} 60°$

$\text{tang.} 15° + \text{tang.} 75° = 4.$

Eben ſo auch

$\text{ſin.} 54° - \text{ſin.} 18° = \tfrac{1}{2} = \text{ſin.} 30°$

$\text{ſin.} 54° . \text{ſin.} 18° = \tfrac{1}{4}$

$\text{tang.} 18° . \text{tang.} 54° = \sqrt{\tfrac{1}{5}}$

$\text{ſin.} 36° . \text{ſin.} 72° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5}$

$\text{tang.} 18° + \text{ſec.} 18° = \text{tang.} 54°$

$\text{ſin.} 18° + \text{ſin.} 54° = \tfrac{3}{4} = \text{ſin.} 60°$

$\text{coſ.} 18° + \text{coſ.} 54° = \tfrac{5}{4}$

ingleichen

$\text{ſec.} 30° = \tfrac{1}{2}(\text{tang.} 30° + \text{tang.} 60°)$

$= \tfrac{4}{3} \text{ſin.} 60°.$

V.

Vorläufige Kenntniſſe für die, ſo die Quadratur und Rectification des Circuls ſuchen.

§. 1.

Ich kann mit einigem Grunde zweifeln, ob gegenwärtige Abhandlung von denjenigen werde geleſen, oder auch verſtanden werden, die den meiſten Antheil daran nehmen ſollten, ich meyne von denen, die Zeit und Mühe aufwenden, die Quadratur des Circuls zu ſuchen. Es wird ſicher genug immer ſolche geben, und ſolte man die, ſo in den folgenden Zeiten ſich damit beſchäftigen, nach denen beurtheilen, die ſich bisher damit beſchäftigt haben, ſo werden es gröſtentheils ſolche ſeyn, die von der Geometrie wenig verſtehen, und ihre Kräfte zu ſchätzen nicht im Stande ſind. Was aber den meiſten an Erkenntniß und Verſtand abgeht, und wo ſie mit richtigen und zuſammenhängenden Schlüſſen nicht ausreichen, das erſetzt die Ruhm- und Geldbegierde durch Sophismata, die öfters auch weder ſehr fein, noch ſehr verſteckt ſind. Es hat auch Fälle gegeben, wo ſolche Leute feſte geglaubt

glaubt haben, man verſage ihren vermeynten Beweiſen den Beyſall bloß aus Neid und Mißgunſt. Es geht auch unter ihnen eine Sage herum, als wenn in England und Holland eben ſo groſſe Preiße und Belohnungen wären auf die Quadratur des Circuls geſetzt worden, als auf die Erfindung der geographiſchen Länge zur See. Ich will zwar eben nicht gut dafür ſtehen, ob man nicht zu Anfange des vorigen Jahrhunderts, oder noch vorher, geglaubt hat, daß die Erfindung der Länge zur See mit der Quadratur des Circuls in einer ſolchen Verbindung ſtehe, daß, wer letztere gefunden, zugleich auch erſtere gefunden habe. So viel iſt gewiß, daß man damals Verhältniſſe zwiſchen Wahrheiten ſuchte und glaubte, die noch vielweniger zuſammen paßten. Solte aber in der That wegen der Länge zur See ein Preiß auf die Quadratur des Circuls geſetzt worden ſeyn, ſo glaube ich, daß das Parlement in England ein ſehr gutes Werk thun würde, wenn es, zumal da nun die Preiße für die Länge zur See ſchon ausgetheilt worden, in allen Zeitungen kund machen lieſſe, daß man ſich bey der Quadratur des Circuls auf keinen Preiß Rechnung zu machen habe. In der That hat man ſich auch keine Rechnung darauf zu machen, weil man heutiges Tages viel zu wohl weiß, wie ſehr die Länge zur See von der Quadratur des Circuls unabhängig iſt.

§. 2.

Digitized by Google

§. 2.

Die Erfindung von Sachen, die lange vergebens geſucht worden, iſt entweder an ſich unmöglich, oder ſie iſt einem künftigen glücklichen Zufall vorbehalten. Ein Beyſpiel mag dieſes erläutern. Es iſt nicht zu zweiffeln, daß die alten Phoeniciſchen, und nach ihnen die Griechiſchen und Römiſchen Schiffer ein Mittel gewünſcht haben, welches ihnen bey trübem Wetter eben ſo den Weg des Schiffes zeigte, als ihn bey hellem Wetter die Geſtirne zeigten. Wie hätte ihnen in Sinn kommen ſollen, daß ſie dieſes Mittel in dem Magnetſteine zu ſuchen hätten? Es iſt unſtreitig, daß dieſe Entdeckung auf einen ſchlechthin unvorgeſehenen Zuſammenlauf mehrerer Umſtände ankäme, den man, ohne ihn vorher zu wiſſen, nicht veranſtalten konnte, und der folglich ſich von ſelbſt darbieten muſte. Auf eine ähnliche Art iſt es zu vermuthen, daß, wenn je die Quadratur des Circuls möglich ſeyn ſolte, ſie vielleicht einem Meßkünſtler aufſtößt, der an nichts wenigers als an die Erfindung derſelben gedenkt. Es iſt aber auch möglich, daß man auf eine eben ſo zufällige Weiſe auf irrige Quadraturen verfalle. Hievon geben die Zahlen 1225 und 961 ein artiges Beyſpiel. Sie haben eine gedoppelte Eigenſchaft. Denn einmal ſind es die Quadratzahlen von 35 und 31. Sodann verhalten ſie ſich beynahe wie das Quadrat

Digitized by Google

des Diameters zum Inhalt des Circuls. Dadurch erhält man auch, daß der Diameter des Circuls zu der Seite eines mit dem Circul gleichräumigen Quadrates beynahe wie 35 zu 31 iſt. Sodann, wenn man 961 vierfach nimt, ſo erhält man 3844 ebenfalls eine Quadratzahl, und der Diameter wird ſich zum Umkreiſe beynahe wie 1225 zu 3844 verhalten. Nur muß man dieſes beynahe nicht ſehr ſtrenge nehmen. Denn theilt man 3844 durch 1225, ſo kömmt 3,138... Und da ſieht man leicht, daß dieſe Verhältniß ſchon in der 3ten Decimalſtelle von 3,1415926... abweicht, und daher lange nicht ſo genau iſt, als die Archimediſchen 22:7, welche die Reihe 3,1428571... giebt, die nur um 0,0012645... zu groß, und damit faſt dreymal genauer iſt.

§. 3.

Indeſſen behalten die Zahlen 1225 und 961, oder 1225 und 3844 dennoch dadurch einen gewiſſen Werth, daß es Quadratzahlen ſind. In dieſem Jahrhundert ſind, ſo viel ich weiß, ihrer drey darauf verfallen. Dieſer Umſtand ſcheint mir der merkwürdigſte. Denn da es noch mehrere ſolcher Quadratzahlen giebt, ſo ſolte man ehender denken, daß jeder von dieſen drey Erfindern auf andere Zahlen würde verfallen ſeyn. Der erſte war Herr von Leiſtner, Kayſerl. Rittmeiſter. Er fand die Zahlen 1225 und 3844, und dieſe wurden von einer Kayſerl. Hofcommiſſion als unrichtig erkannt, wowider aber

aber in einer Anno 1740 herausgekommenen Schrift, Nodus gordius &c. proteſtirt wurde. Der andere war Herr **Merkel**, Prediger zu Rakensburg in Schwaben. Seine Schrift kam erſt Anno 1751 heraus. Er ſagt aber, daß er lange vor dem Herrn v. **Leiſtner** ſeine Zahlen 1225 und 961 zufälliger Weiſe gefunden habe, er ſey aber erſt durch den Nodum gordium bewogen worden, ſie auf alle Proben zu ſetzen; was ihn aber fürnemlich aufgebracht habe, ſie durch den Druck bekannt zu machen, ſey ein Articul in der Utrechter Zeitung geweſen, wo eine Quadratur angekündet, und der vermeyntlich darauf geſetzte Preiß angefordert wurde; dieſe Nachricht habe ihm um ſo geſchwinder die Feder in die Hand gegeben, weil er den vorhergehenden Winter ſeine Zahlen einen Franzoſen, der wirklich nachher in die Niederlande verreiſete, vorgerechnet, und auf das Papier nicht weiter Achtung gegeben, und ſo habe er ſtarke Gründe zu vermuthen, dieſer Geometra möchte mit ſeinem Kalbe gepflügt haben ꝛc. Was damit nun weiter vorgegangen, iſt mir nicht bekannt. Es wurde aber die Merkelſche Schrift Anno 1765 von Herrn Prof. **Biſchoff** zu Alten-Stettin mit Anmerkungen und noch mehrerern Prüfungen wiederum aufgelegt, und die Zahlen 1225 und 961 als richtig erklärt. Bald darauf kamen ſie im Anfange des 1766ſten Jahres in den Zeitungen wiederum zum Vorſchein, mit der

ſolen-

ſolennen Ankündigung, daß man fernerhin die Quadratur des Circuls nicht mehr zu ſuchen nöthig habe, weil ſie bereits, und zwar zum drittenmale gefunden worden ꝛc. Es wäre eben nicht übel gethan, wenn viele, die noch künftighin ſich an die Sache machen werden, dieſes ganz feſte glaubten, weil ſie dadurch überhoben wären, Mühe, Zeit und Kräfte zu verliehren, die man als ſehr vergebens angewandt anſehen kann, weil die meiſten von denſelben kaum eine leichte geometriſche Aufgabe zu erfinden und aufzulöſen im Stande ſind. Es iſt auch kaum zu zweifeln, daß nicht auch künftig noch die **Merkelſche** und **Leiſtnerſche** Zahlen wieder aufgewärmt zum Vorſchein kommen ſolten. Die Hauptprobe von ihrer Unrichtigkeit iſt, daß 3844 durch 1225 getheilt, die **Ludolphiſche** Zahlen geben ſolte. Herr Prof. **Biſchoff** nimmt auch dieſe **Ludolphiſche**, und ſogar die über doppelt weiter reichende **Sherwinſche** Zahlen vor, er ſieht ſie aber nicht als Probierſteine an, ſondern ſagt, daß ſie zwar gar ſehr nahe zutreffen, dabey aber den Inhalt des Circuls nicht völlig genau geben, demnach müſte man auf andere Proben bedacht ſeyn. Von ſolchen Proben führt Herr **Biſchoff** 8 an, und macht auf dieſe Art die Sache ſcheinbar. Es iſt unſtreitig, daß wenn 3844 durch 1225 getheilt, die bis auf 32 Decimalſtellen reichende **Ludolphiſche** Zahlen genau geben würde, man

damit eines Theils ſehr wohl zufrieden ſeyn könnte, andern Theils aber ſehen müſte, ob man durch dieſe Diviſion auch die bis auf 72 Decimalſtellen reichende Sherwinſche Zahlen, und ſodann die bis auf 100 Decimalſtellen reichende **Machinſche**, oder endlich die bis auf 127 Decimalſtellen reichende **Lamy**ſche Zahlen heraus bringen würde. Man könnte ſodann um ſo mehr noch mit der Proportion 3844 : 1225 zufrieden ſeyn. Allein nimmt man bemeldte Diviſion vor, ſo fängt der Quotient 3, 138.... ſchon in der zweyten Decimalſtelle an, von den **Ludolphiſchen** Zahlen abzuweichen. Und überdies ſind alle die 8 Proben von der Art, daß jede beliebige zwo Quadratzahlen dieſelbe aushalten. Ich werde mich aber nicht verweilen, dieſes hier zu zeigen, ſondern vielmehr angeben, wie ſich nach einer allgemeinen Regel ſolche Quadratzahlen finden laſſen, welche die Verhältniß des Quadrats des Diameters zum Inhalte des Circuls deſto genauer angeben, je gröſſer ſie ſind. Dieſes mag unter andern auch dahin dienen, daß man künftig nicht nöthig habe, erſt zufälliger Weiſe auf ſolche Quadratzahlen zu verfallen, und ſie als ganz richtige Quadraturen des Circuls anzugeben.

§. 4.

Man nehme zwo Quadratzahlen aa, bb, ſo, daß wenn a der Diameter des Circuls, dem-

demnach aa deſſen Quadrat iſt, ſodann bb den Inhalt eines mit dem Circul gleichräumigten Quadrates, und daher b die Seite deſſelben vorſtelle. Auf dieſe Art wird ſich aa zu 4bb wie der Diameter zum Umkreiſe, oder wie 1 zu 3, 141592, 653589, 793238, 462643, 383279, 502884, 197169, 399375, 105820, 974944, 592307, 816406, 286208, 998628, 034825, 342117, 067982, 148086, 513272, 306647, 093844, 6 + ... = 1 : π verhalten.
Demnach iſt $aa : 4bb = 1 : \pi$
und hieraus folgt

$$a : b = 2 : \sqrt{\pi}.$$

Es iſt aber $\sqrt{\pi} = 1,77245385075 \ldots$
Und hieraus findet ſich

$$a:b = \frac{2,00000000000}{1,77245385075} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{26 + \text{ꝛc.}}}}}}}}$$

Dieſes giebt der Ordnung nach

$b:a =$	$7:8 + \ldots$	und $bb:aa =$	$49:64 +$
$=$	$8:9 - \ldots$	$=$	$64:81 -$
$=$	$31:35 + \ldots$	$=$	$961:1225 +$
$=$	$39:44 - \ldots$	$=$	$1521:1936 -$
$=$	$109:123 + \ldots$	$=$	$11881:15129 +$
$=$	$148:167 - \ldots$	$=$	$21904:27889 -$
$=$	$3848:4342 + \ldots$ ꝛc.	$=$	$14807104:18852964 +$ ꝛc.

 Dieſe

Dieſe Brüche ſind nun der Ordnung nach genauer. Man ſieht auch hieraus, daß die Herren von Leiſtner, Merkel, Biſchoff ꝛc. nur zufälliger Weiſe auf ihre Zahlen 961, 1225 verfallen ſind. Denn die Rechnung mit 49:64 oder 64:81 wäre immer viel leichter und kürzer geweſen, und mit 1521:1936, oder 11881:15129 ꝛc. würde ſie zwar weitläuftiger, dabey aber genauer geweſen ſeyn.

§. 5.

Es iſt aber überhaupt mehr anzurathen, ſchlechthin nur die erſten von dieſen Verhältniſſen nemlich b:a zu gebrauchen. Denn für bb:aa hat man andere Brüche, die, ohne eben Quadratzahlen zu ſeyn, viel kleiner und viel genauer ſind, indem man nach eben dieſer Art zu verfahren

$$bb:aa = \pi:4 = 11:14$$
$$= 172:219$$
$$= 355:452 \text{ ꝛc.}$$

findet. Es drücken aber die Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{39}{44}$, $\frac{109}{123}$, $\frac{148}{167}$, $\frac{3848}{4342}$ ꝛc. die Seite eines Quadrates aus, welches ſo groß als die Fläche eines Circuls iſt, deſſen Diameter = 1 angenommen wird. Und hinwiederum ſtellen eben dieſe Brüche umgekehrt, oder $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{35}{31}$,

$\frac{44}{39}$, $\frac{123}{109}$, $\frac{167}{148}$, $\frac{4342}{3848}$ ꝛc. den Diameter eines Circuls vor, deſſen Inhalt = 1 iſt. Und in dieſer Abſicht laſſen ſie ſich bey Ausmeſſung von Cylindern, und bey Verfertigung der cylindriſchen Viſirſtäbe gebrauchen. Beſonders iſt hiezu der Bruch $\frac{167}{148}$ dienlich, weil derſelbe unter den kleinern der genaueſte iſt, und erſt in der ſiebenden Decimalſtelle anfängt von dem wahren abzuweichen. Denn rechnet man nach, ſo findet ſich der Diameter des Circuls, deſſen Inhalt = 1 iſt, vermittelſt der Ludolphiſchen Zahlen = 1,1283790...

Es iſt aber $\frac{167}{148}$ = 1,1283784...

demnach der Unterſchied = 0,0000006...

Es geſchieht ſelten, daß man dieſen Diameter in practiſchen Fällen genauer zu wiſſen verlangt.

§. 6.

Da es, wenn man den Diameter einer Kugel mit der Seite eines gleichräumigten Würfels vergleicht, ebenfalls möglich iſt, auf ſolche Cubiczahlen zu verfallen, woraus man die Quadratur des Cirkels, oder die Cubatur der Sphären erträumen könnte; ſo wird es eben nicht undienlich ſeyn, ſolchen künftigen Vorfällen vorzubeugen, und ſolche Cubiczahlen nach eben der Methode voraus zu beſtimmen, zumal da ſie bey Berechnung des räumlichen Inhalts der Kugeln, und bey Verfertigung der

Caliberſtäben mit Vortheil gebraucht werden können. Es ſey demnach der Diameter der Kugel = a, die Seite des gleichräumigten Würfels = b, die Ludolphiſche Zahlen 3,1415926... = π, ſo iſt nach der bekannten Archimediſchen Regel

$$b^3 : a^3 = \pi : 6$$

demnach $$b : a = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Nun iſt

$$\pi = 3,141592,653589,793238,462\ldots$$
$$\tfrac{1}{6}\pi = 0,523598,775598,298873,077\ldots$$

Und hieraus die Cubicwurzel

$$b : a = 0,805995,977008,234820\ldots$$

welche in einen immer fortgehenden Bruch aufgelöſt

$$b : a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+ \text{ꝛc.}}}}}}}}$$

giebt. Hieraus erhält man nun

$$\begin{aligned} b : a &= 4 : 5 + \\ &= 25 : 31 - \\ &= 54 : 67 + \\ &= 457 : 567 - \\ &= 2796 : 3469 + \\ &= 17233 : 21381 - \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Dem-

Demnach, wenn der Diameter einer Kugel $= 1$ iſt, ſo wird die Seite eines gleichräumigten Würfels durch jeden der Brüche $\frac{4}{5}$, $\frac{25}{31}$, $\frac{54}{67}$, $\frac{457}{567}$, $\frac{2796}{3469}$, $\frac{17233}{21381}$ ꝛc. deſto genauer ausgedrückt, je gröſſer derſelbe iſt. Cubirt man dieſe Brüche, ſo geben ſie den Inhalt der Kugel. Setzt man aber den körperlichen Inhalt der Kugel $= 1$, ſo ſtellen eben dieſe Brüche umgekehrt $\frac{5}{4}$, $\frac{31}{25}$, $\frac{67}{54}$, $\frac{567}{457}$, $\frac{3469}{2796}$, $\frac{21381}{17233}$ ꝛc. den Diameter der Kugel vor. Man kann ſich mehrentheils mit dem Bruche $\frac{567}{457}$ begnügen, weil derſelbe, wenn man nachrechnet, den Diameter der Kugel eben ſo genau giebt, als man denſelben vermittelſt der logarithmiſchen Tabellen findet.

§. 7.

Ich habe bey dieſer Rechnung die Cubicwurzel von $\frac{1}{6}\pi$ bis auf die 18te Decimalſtelle geliefert. Da es nun eine verdrüßige und ungemein langwierige Arbeit wäre, wenn man ſie nach den gemeinen Regeln bis ſo weit ſuchen wolte, ſo wird es nicht undienlich ſeyn, wenn ich noch beyfüge, wie ich dieſe Wurzel vermittelſt einer einigen Regel de tri gefunden, und zugleich, wie ich mich verſichert habe, daß ſie bis auf die 18te Decimalſtelle richtig iſt.

§. 8.

Nach der Newtonſchen Binnomialformel iſt überhaupt

$$x = (a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + n.\frac{n-1}{2}. a^{n-2} b^2 + \&c.$$

Man multiplicire nun dieſe Reihe mit $1 + zb : a$, und in dem Producte

$$x\left(1 + \frac{zb}{a}\right) = a^n + n a^{n-1} b + n.\frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \text{rc.}$$
$$+ z a^{n-1} b + n.z.a^{n-2} b^2 + n.\frac{n-1}{2}.z a^{n-3} b^3 + \text{rc.}$$

ſetze man, um z zu beſtimmen, das dritte Glied

$$n.\frac{n-1}{2}.a^{n-2} b^2 + n.z.a^{n-2} b^2 = 0$$

ſo iſt $z = -\frac{n-1}{2}$

Wird nun dieſer Werth von z in dem Producte geſetzt, ſo erhält man

$$x\left(1 - \frac{n-1}{2}.\frac{b}{a}\right) = a^n + \frac{n+1}{2} a^{n-1} b + * - n.\frac{n-1}{2}.\frac{n+1}{6} a^{n-3} b^3 - \&c.$$

und hieraus

$x =$

$$x = (a+b)^n = \left(\frac{2a+(n+1)b}{2a-(n-1)b}\right) a^n + * - \frac{n.(n-1).(n+1)a^{n-2}\,b^3}{6(2a-(n-1)\,b)} - \&c.$$

Von dieſer Reihe wird das erſte Glied zur Beſtimmung der Wurzel gebraucht, das zweyte aber dient, um zu finden, wie weit man mit dem erſten ausreicht.

§. 8.

Nun iſt für die Cubicwurzel $n = \frac{1}{3}$. Setzt man dieſen Werth, ſo erhält man nach den behörigen Reductionen die Formel

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \frac{3a+2b}{3a+1b}.\sqrt[3]{a} + * + \frac{2b^3.\sqrt[3]{a}}{81a^3+27aab} + \&c.$$

Dieſe habe ich nun, um aus

$a+b = \frac{1}{6}\pi = 0{,}523598{,}775598{,}298873{,}077\ldots$

die Cubicwurzel zu ziehen, folgendermaſſen angewandt. Erſtlich fand ich, vermittelſt der Logarithmen die ſechs erſten Decimalſtellen dieſer Wurzel. Dieſe ſind

$$0{,}805995 = \sqrt[3]{a}$$

Und da

$$805995 = 806000 - 5$$

iſt, ſo lieſſe ſich hievon der Cubus leicht finden. Ich ſetzte demnach denſelben

$$0,523596871520449875 = a$$

und dadurch erhielt ich

$$b = 0,0000019040778489980771 07\ldots$$

Da nun, wenn man das erſte Glied der Reihe

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \frac{3a+2b}{3a+b}. \sqrt[3]{a}$$

allein beybehält, dieſes die Regel de tri giebt

$$(3a+b):(3a+2b) = \sqrt[3]{a}:x$$

oder $(a+\frac{1}{3}b):(a+\frac{2}{3}b) = \sqrt[3]{a}:x$,
ſo durfte ich nur die Werthe von a und b ſetzen, um den Werth

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0,805995977008234820\ldots$$

zu erhalten. Daß nun aber dieſer Werth bis auf die 18te Decimalſtelle richtig ſeye, fand ich vermittelſt des zweyten Gliedes der Reihe

$$\frac{2b^3.\sqrt[3]{a}}{81a^3+27a^2b}$$

durch einen leichten Ueberſchlag. Denn da b um 275000 mal kleiner iſt als a, ſo konnte ich dieſes Glied

$$\frac{2b^3}{81a^3}.\sqrt[3]{a}$$

ſetzen. Nun iſt

$$3\log.b:a = 0,6820508 - 17$$

$$\log.\frac{2}{81} = 1,6074550$$

$$\text{demnach } \log.\frac{2b^3}{81a^3} = 0,9145458 - 19.$$

Da

Da nun hier die Characteriſtica $= -19$, und $a < 1$ iſt, ſo iſt klar, daß

$$\frac{2b^3}{81a^3} \cdot \sqrt[3]{a}$$

einen Decimalbruch vorſtellt, der erſt auf der 19ten Decimalſtelle anfängt. Und ſo iſt die durch

$$x = \frac{3a+2b}{3a+b} \cdot \sqrt[3]{a}$$

gefundene Decimalreihe bis auf die achtzehnte Stelle genau.

§. 9.

Ob die Verhältniß des Diameters zum Umkreiſe durch einen rationalen Bruch ausgedrückt werden könne, iſt, meines Wiſſens, noch nicht erörtert. Sturm hat zwar dieſe Frage zu verneinen geſucht: allein ſein Beweis iſt mangelhaft, weil es allerdings unendliche Reihen giebt, deren Summa rational iſt, ungeachtet alle Glieder irrational ſind. Da demnach die Sache noch zu erörtern bleibt, ſo kann es immer noch Leute geben, die mit Aufſuchung ſolcher rationalen Brüche ihre Zeit verlieren, oder durch irrige Schlüſſe dergleichen auf die Bahn bringen. Nun iſt zwar bey jedem, vermittelſt der Ludolphiſchen Zahlen, die Probe bald gemacht. Allein, wenn auch der fürgegebene Bruch dadurch verworffen wird, ſo kann noch immer die Luſt bleiben, andere zu ſuchen. Nun läßt ſich dieſe Luſt ſo

geringe

Digitized by Google

geringe machen, daß man das Aufſuchen ſolcher Brüche leicht wird bleiben laſſen. Denn wenn auch die Verhältniß des Diameters zum Umkreiſe ſich genau durch einen rationalen Bruch ausdrücken lieſſe, ſo kann man aus den oben (§. 4.) angeführten Lamyſchen Zahlen, oder auch aus den Ludolphſchen Zahlen erweiſen, daß es ein ſehr groſſer Bruch ſeyn müſſe. Dieſe Zahlen laſſen ſich nemlich in Brüche verwandeln, welche der Ordnung nach gröſſer und zugleich auch genauer werden. Die Methode und die dabey zu gebrauchende Vorſichtigkeit, habe ich in der Abhandlung von Verwandlung der Brüche §. 17. angezeigt und durch Beyſpiele erläutert. Nach dieſer Methode fand ich für das Verhältniß des Diameters zum Umkreis folgende rationale Brüche oder Verhältniſſe

1	:	3
7	:	22
106	:	333
113	:	355
33102	:	103993
33215	:	104348
66317	:	208341
99532	:	312689
265381	:	833719
364913	:	1146408
1360120	:	4272943
1725033	:	5419351
25510582	:	80143857

Digitized by Google

52746197 : 165707065
78256779 : 245850922
131002976 : 411557987
340262731 : 1068966896
811528438 : 2549491779
1963319607 : 6167950454
4738167652 : 14885392687
6701487259 : 21053343141
567663097408 : 1783366216531
1142027682075 : 3587785776203
1709690779483 : 5371151992734
2851718461558 : 8958937768937
107223273857129 : 336851849443403
324521540032945 : 1019514486099146 ꝛc.

Von dieſen Verhåltniſſen iſt nun jede folgende genauer als die vorhergehende, und zwiſchen dieſelben fållt keine rationale Verhåltniß, die genauer wåre, als die nåchſt groͤſſere unter den hier angegebenen. Demnach wenn auch die Verhåltniß des Diameters zum Umkreiſe durch ganze Zahlen genau ſollte ausgedruͤckt werden koͤnnen, ſo muͤſten dieſe Zahlen nothwendig groͤſſer als die letzten

324521540032945 : 1019514486099146

von den hier angegebenen ſeyn. Dieſe zwo Zahlen geben die Ludolphiſche bis auf die 25te Decimalſtelle. Wenn ſie aber auch ganz genau wåren, ſo ſieht man leicht, daß es weitlåuftig und beſchwerlich wåre damit zu rechnen. Uebrigens entſtehen alle dieſe Verhåltniſſe aus der Fractio continua

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{2+a}}}}}}}}}}}}}}$$

wobey $a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{84+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{37+\cfrac{1}{3+ \text{ꝛc.}}}}}}}}}}}}}$

iſt.

iſt. Weiter habe ich die Berechnung von dieſer Fractio continua aus den Ludolphiſchen Zahlen nicht verfolgt. Und ſo werde ich auch nicht ſagen, ob ſie, wenn weiter fortgerechnet wird, irgend abgebrochen werde. Wäre dieſes, ſo lieſſe ſich die Verhältniß des Diameters zum Umkreiſe, durch ganze, wiewohl ungeheuer groſſe Zahlen ausdrücken. Ich habe aber in vorbemeldter Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** (§. 23) eine andere Fractio continua angegeben, welche nach einem gewiſſen Geſetze ins Unendliche fortgeht, und die Hofnung, die Verhältniß des Diameters zum Umkreiſe durch ganze Zahlen zu beſtimmen, ganz benimmt.

§. 10.

Es giebt in der Mathematik noch andere Gröſſen, von denen es ſich eben ſo viel der Mühe lohnte, zu ſuchen, ob ſie durch rationale Brüche, oder auf eine geſchmeidigere Art ausgedrückt werden können, als es noch dermalen durch Decimalzahlen geſchieht. Dahin kann beſonders die Zahl 2,718281,828459,045235, 36028 ... gerechnet werden, deren hyperboliſcher Logarithmus = 1 iſt. Dieſe Zahl iſt in Abſicht auf die Logarithmen eben das, was die Ludolphiſchen Zahlen in Abſicht auf den Circul ſind, und daher in Abſicht auf trigonometriſche und andere Rechnungen von gleicher **Erheblichkeit**. Fragt man demnach, warum

denn

denn nur die Ludolphiſche Zahlen ſo viel Weſens machen? ſo wird dieſe Frage theils nur aus der Geſchichte der Mathematik, und theils auch dadurch beantwortet werden können, daß die Begriffe Circul, Vierecke, Gröſſe, gleich jedermann bekannt ſind, welches ſich von dem Begrif hyperboliſche Logarithmen nicht ſagen läßt, weil dieſer Begrif erſt durch den Infiniteſimalcalcul bekannt worden, und ohne die Erlernung dieſes Calculs nicht wohl deulich gemacht werden kann. Wäre den meiſten unter denen, ſo die Quadratur des Circuls ſuchen, nicht dieſer Riegel geſchoben, ſo würden, allem Anſehen nach, eben ſo viel vergebliche Bemühungen und fehlgeſchlagene Verſuche, in Anſehung der Zahl 2,718281,828459,045235,36028... zum Vorſchein kommen, als in Anſehung der Ludolphiſchen Zahlen zum Vorſchein gekommen ſind. Es läßt ſich aber auch dieſe Zahl nicht durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken. Denn ſetzt man dieſelbe Kürze halber $= e$, ſo iſt

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{ꝛc.}}}}}}}}$$

oder

oder $\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+ \text{etc.}}}}}}$

oder

$$\frac{ee-1}{ee+1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\text{etc.}}}}}}}$$

und überhaupt

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{2:x+\cfrac{1}{6:x+\cfrac{1}{10:x+\cfrac{1}{14:x+\text{etc.}}}}}$$

Da dieſe Brüche immer fortgehen, ſo läßt ſich auch weder e noch e^x durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken, wenn nemlich x eine rationale Zahl oder Bruch iſt. Ich habe übrigens dieſe Formeln nach der Methode gefunden, die ich in vorbemeldter Abhandlung von Verwandlung der Brüche (§. 19. ſeqq.) angegeben habe.

habe. Die Veranlaſſung aber, dieſe Formeln zu ſuchen, gab mir des Herrn Eulers Analyſis infinitorum, wo der Ausdruck

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\text{rc.}}}}}}$$

in Zahlen berechnet, in Form eines Beyſpieles vorkömmt.

§. 11.

Auf eben dieſe Veranlaſſung gienge ich weiter, und fande in Abſicht auf die Circulbögen den Ausdruck

$$\text{tang. } v = \cfrac{1}{1:v-\cfrac{1}{3:v-\cfrac{1}{5:v-\cfrac{1}{7:v-\cfrac{1}{9:v-\text{rc.}}}}}}$$

Aus dieſem immer fortgehenden Bruche laſſen ſich, in Abſicht auf die unbeſtimmte Quadratur des Circuls, verſchiedene Folgen ziehen. Man ſetze n eine ganze Zahl, und mache $v = 1:n$, ſo iſt

tang.

$$\text{tang. } v = \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \cfrac{1}{9n - \cfrac{1}{11n - \text{ꝛc.}}}}}}}$$

Da dieſer Bruch immer fortgeht, ſo folgt daraus, daß, ſo oft ein Circulbogen eine Pars aliquota des Halbmeſſers iſt, die Tangente deſſelben nothwendig irrational ſey. Denn wäre die Tangente rational, ſo könnte dieſer Bruch nicht in einem fortgehen, ſondern er müſte irgend aufhören. Um dieſes mehr zu erläutern, wollen wir zum Beyſpiele $v = 1$ ſetzen. Da nun auch $n = 1$ wird, ſo iſt

$$\text{tang. arc. } 1 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{9 - \text{ꝛc.}}}}}}$$

demnach zufolge der vorhin (§. 9.) angeführten Abhandlung

	+ 1	+ 0
+ 1	+ 0	+ 1
− 3	+ 1	+ 1
+ 5	− 3	− 2
− 7	− 14	− 9
+ 9	+ 95	+ 61
− 11	+ 841	+ 540
+ 13 ꝛc.	− 9156 ꝛc.	+ 5879 ꝛc.

Digitized by Google

Und ſo wird die Tangente des dem Halbmeſſer gleichen Bogens, der Ordnung nach, durch die Brüche

$$\frac{3}{2}, \frac{14}{9}, \frac{95}{61}, \frac{841}{540}, \frac{9156}{5879} \text{ ꝛc.}$$

und zwar durch jeden folgenden dergeſtalt genauer ausgedrückt, daß jeder kleinere Bruch minder genau iſt. Da nun dieſe Reihe von Brüchen nirgends abgebrochen wird, ſondern dergeſtalt fortgeht, daß endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinſame Theiler zu haben, gröſſer werden, als jede fürgegebene Zahl, ſo läßt ſich die Tangente des dem Halbmeſſer gleichen Bogens durch keinen endlichen oder rationalen Bruch ausdrücken. Eben dieſes gilt auch für die Tangenten jeder Bögen die $\frac{1}{n}$ Theil des Halbmeſſers ſind.

§. 12.

Werden die erſtgefundene Brüche von einander abgezogen, ſo findet ſichs dadurch, wie geſchwinde ſie dem wahren Werthe näher kommen. Denn ſo iſt

$$\frac{14}{9} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9}$$

$$\frac{95}{61} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61}$$

$$\frac{841}{540} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540}$$

$$\frac{9156}{5879} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879}$$

ꝛc.

Fährt

Fährt man auf dieſe Art fort, ſo wird die Tangente des dem Halbmeſſer gleichen Bogens durch eine unendliche Reihe

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879} + \frac{1}{5879.76887} + \text{ꝛc.}$$

ausgedrückt, welche ſtärker convergirt als jede geometriſche Reihe, und man weiß, daß die Summe derſelben irrational iſt.

§. 13.

Daß aber nicht nur die Tangenten der Bögen $\frac{1}{n}$, ſondern überhaupt jeder Bögen $\frac{m}{n}$, die zum Halbmeſſer ein rationales Verhältniß haben, irrational ſeyn, erhellet auf eben dieſe Art. Es ſey z. E. $v = \frac{2}{3}$, ſo iſt die Tangente dieſes Bogens

$$= \cfrac{1}{3:2 - \cfrac{1}{9:2 - \cfrac{1}{15:2 - \cfrac{1}{21:2 - \text{ꝛc.}}}}}$$

demnach	1	0	
+ 3:2	0	1	= 0:1
− 9:2	+ 1	+ 3:2	= 2:3
+ 15:2	− 9:2	− 23:4	= 18:23
− 21:2	− 131:4	− 333:8	= 262:333
+ 27:2	+ 2715:8	+ 6901:16	= 5430:6901
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	

Digitized by Google

Und ſo wird die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$, durch jeden der Brüche $\frac{2}{3}, \frac{18}{23}, \frac{262}{333}, \frac{5430}{6901}$ ꝛc. und zwar durch jeden folgenden dergeſtallt genauer ausgedrückt, daß jeder kleinere Bruch minder genau iſt. Da nun dieſe Reihe von Brüchen nirgend aufhört, ſondern ſo anwächſt, daß endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinſame Theiler zu haben, gröſſer werden als jede fürgegebene Zahl, ſo folgt, daß die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$ irrational ſey. Eben dieſes gilt auch für die Tangenten jeder Bögen, die $= \frac{m}{n}$ ſind, oder zum Halbmeſſer ein rationales Verhältniß haben. Zieht man die erſtgefundene Brüche von einander ab, ſo erhält man für die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$, die Reihe

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3 \cdot 23} + \frac{32}{23 \cdot 333} + \frac{128}{333 \cdot 6901} + \text{ꝛc.}$$

welche ebenfalls ſtärker als jede geometriſche Reihe convergirt und eine irrationale Summe hat.

§. 14.

Da demnach die Tangente eines jeden rationalen Bogens irrational iſt, ſo iſt hinwiederum auch der Bogen einer jeden rationalen Tangente irrational. Denn man ſetze, der Bogen wäre rational, ſo würde der Vorausſetzung zuwider die Tangente, vermöge des erſt erwieſenen, irrational ſeyn.

§. 15

§. 15.

Wir haben in den trigonometriſchen Tabellen eine einige rationale Tangente, nemlich die von 45 Gr. welche den Halbmeſſer gleich, und demnach = 1 iſt. Damit iſt alſo der Bogen von 45 Gr. und folglich auch der Bogen von 90, 180, 360 Gr. irrational, oder dieſe Bögen haben zu dem Halbmeſſer des Circuls kein rationales Verhältniß.

§. 16.

Aus dem bisher geſagten erhellet demnach ſo viel, daß kein Bogen nebſt ſeiner Tangente zugleich ein rationales Verhältniß zum Halbmeſſer haben könne. Es iſt aber auf unzählige Arten möglich, daß ein Bogen zu ſeiner Tangente ein rationales Verhältniß habe. Allein es läßt ſich auch beweiſen, daß in allen dieſen Fällen, ſowohl der Bogen als die Tangente deſſelben, mit dem Halbmeſſer incommenſurabel ſind. Denn erſtlich können, vermöge des bereits erwieſenen, nicht beyde zugleich zu dem Halbmeſſer ein rationales Verhältniß haben. Man ſetze demnach, es ſey nur die Tangente oder nur der Bogen allein. Im erſten Fall müſte die Tangente ſowohl mit dem Halbmeſſer als mit dem Bogen commenſurabel ſeyn. Und ſo wäre eben dadurch auch der Bogen mit dem Halbmeſſer commenſurabel, weil die Summe oder die Differenz zweyer rationalen

Verhältniſſe ebenfalls rational iſt. Im andern Fall wäre der Bogen zugleich mit der Tangente als mit dem Halbmeſſer commenſurabel, und ſo würde ebenfalls die Tangente zu dem Halbmeſſer ein rationales Verhältniß haben. Da nun vermöge des vorhin erwieſenen, Halbmeſſer, Bogen und Tangente nicht zugleich commenſurabel ſind, ſo werden die beyden angeführten Fälle umgeſtoſſen; demnach wenn Bogen und Tangente unter ſich ein rationales Verhältniß haben, ſo ſind beyde mit dem Halbmeſſer incommenſurabel.

§. 17.

Noch werde ich kurz zween Umſtände berühren, die in Abſicht auf die Quadratur des Circuls etwas ſcheinbares haben. Der erſte iſt folgender Satz: Wenn man um einen Circul ein beliebiges regulaires oder irregulaires Vieleck beſchreibt, ſo, daß jede Seite den Circul berühre, ſo verhält ſich der Umkreis des Vielecks zu ſeinem Inhalte, wie ſich der Umkreis des Circuls zu ſeinem Inhalte verhält. Den Beweis übergehe ich, weil er ſehr leicht iſt. Der andere Umſtand iſt ein Phaenomenon, welches ſich folgendermaßen eräugnet: Wenn man 1 durch 0,785398 1634... als den vierten Theil der Ludolphiſchen Zahlen dividirt, ſo geht es 1 mal, und es bleibt 0,2146018366.... Dividirt man ferners

dieſen

dieſen Ueberreſt in die 0,7853981634... durch die man vorhin getheilt hatte, ſo geht es 3 mal und es bleibt 0,1415926536.... Setzt man dieſem Ueberreſt die Zahl 3 vor, ſo erhält man 3,1415926536—.. welches gerade die Ludolphiſche Zahlen ſind. Hiezu ſage ich weiter nichts, als daß es ein bloſſes Phaenomenon iſt, woraus ſich auf die Quadratur des Circuls ſchlechthin nicht ſchlieſſen läßt. Es iſt auch nicht ſchwer die Urſache davon zu finden.

VI.
Einige Anmerkungen von Ausmeſſung der Winkel und Linien auf dem Papier.

§. 1.

Tab. I. Unter denen Inſtrumenten, ſo man zur Zeichnung der Figuren auf dem Papier gebraucht, findet ſich gewöhnlich ein Transporteur zu Abnehmung und Auftragung der Winkel, ein Winkelhacken zur Zeichnung von ſenkrechten Linien, und ein Triangel oder zwey zuſammengerichtete Lineale zur Zeichnung der Parallellinien. Alle dieſe Inſtrumente laſſen ſich in eines zuſammenziehen, welches ihre Vortheile vereinigt, und in Abſicht auf die Zeichnung jeder Winkel noch bequemer iſt. Da ich es nirgends ſchon beſchrieben gefunden, ſo werde ich die Verfertigung und den Gebrauch deſſelben, da beydes ſehr leicht iſt, mit wenigen Worten hier anzeigen.

§. 2.

Fig. I. Aus einer hölzernen, helfenbeinernen, hornenen oder metallenen Platte wird ein rechtwinklichter und gleichſchenklichter Triangel ABC von beliebiger Gröſſe ausgeſchnitten, und indem man jeden Cathetum als einen Halbmeſſer

meſſer anſieht, ſo werden aus C gegen A und B die Tangenten jeder Grade von 0 bis 45 Grad aufgetragen, und die Grade ſo hingezeichnet, wie ſie in der Figur zu ſehen. Der mittlere Raum a b c kann ausgeſchnitten oder gelaſſen, und wenn man will, ſo können auf A B Maaßſtäbe gezeichnet werden. Der Gebrauch iſt nun folgender.

§. 3.

Daß man mit dieſem Inſtrumente Perpendiculären ziehen könne, iſt dadurch, daß A C B ein rechter Winkel iſt, für ſich klar; und eben ſo bedarf die Möglichkeit, Parallelinien zu ziehen, keiner weitern Erläuterung. So iſt auch C A B = C B A an ſich ſchon immer ein Winkel von 45 Grad. Ich habe demnach nur noch zu zeigen, wie jede andere Winkel können gezogen werden, je nachdem ſie über oder unter 45 Gr. ſind.

§. 4.

Es ſey demnach auf der Linie D B in B ein Winkel z. E. von 25 Gr. zu ziehen, welcher gegen D offen ſey. Hier wird das Inſtrument dergeſtalt auf die Linie D B gelegt, daß dieſe zugleich durch die Ecke B und durch den gegen über ſtehenden 25 Gr. gehe, und die Ecke B auf den fürgegebenen Punct B falle. Iſt dieſes geſchehen, ſo wird längs B C eine Linie gezogen, und ſo wird C B D der verlangte Winkel ſeyn. Hätte der Winkel gegen E offen ſeyn Fig. II.

ſollen,

ſollen; ſo ſieht man leicht, daß man die Ecke A und den gegenüber ſtehenden 25ten Gr. hätte gebrauchen müſſen. So darf man auch nur die Figur umwenden, um ſich der Lage des Inſtrumentes für die Fälle vorzuſtellen, wo die Linie abwerts zu ziehen iſt.

§. 5.

Da hiebey der Winkel CDB = ADF = 65 Gr. iſt, ſo wird man ſich ohne Mühe vorſtellen können, wie ein Winkel müſſe gezogen werden, der über 45 Gr. iſt. Denn iſt z. E. auf DB ein Winkel CDB, oder FDA von 65 Gr. zu ziehen, ſo wird der 65te Gr. an D und die Ecke B auf die Linie DB angelegt, und längs CA eine Linie gezogen, welche den verlangten Winkel CDB oder FDA = 65 Gr. geben wird. Solte der Winkel nicht gegen E, ſondern gegen F offen ſeyn, ſo wird wiederum die Ecke A und der gegenüber ſtehende 65te Gr. gebraucht. Daß man endlich, auf eben die Art, wie die Winkel gezeichnet werden könne, bereits gezeichnete meſſen kann, verſteht ſich für ſich.

§. 6.

Es iſt auch für ſich klar, daß dieſes Inſtrument fürnehmlich nur dient, um ſolche Winkel zu zeichnen und zu meſſen, deren Schenkel auf der Figur, ſo man zeichnen will, kleiner, oder wenigſtens nicht viel gröſſer ſind, als AC oder AB auf dem Inſtrumente iſt. Bey gröſſern

ſern Figuren bedient man ſich ſicherer der trigonometriſchen Tafeln. Denn ungeachtet in denſelben heut zu Tage die Chorden nicht mehr vorkommen, ſo werden die Sinus leicht in Chorden verwandelt, weil der Sinus des halben Winkels doppelt genommen, der Chorde des ganzen Winkels gleich iſt. Um aber dieſes Verdoppelns überhoben zu ſeyn, darf man nur den Halbmeſſer von 50, 500, 5000 rc. Theilen annehmen, welches, wenn man mit Maaßſtäben von verſchiedener Gröſſe verſehen iſt, immer ſo geſchehen kann, daß der Halbmeſſer die verlangte Gröſſe habe, und wenigſtens in Abſicht auf die Gröſſe der Figur, die man zeichnen will, nicht zu klein ſey. Nimmt man auf einem ſolchen Maaßſtabe den Sinus des halben Bogens, ſo wird derſelbe an ſich ſchon die Chorde des ganzen Bogens ſeyn. Denn da der Halbmeſſer anſtatt von 100, 1000, 10000 rc. Theilen genommen zu werden, von 50, 500, 5000 rc. genommen wird, ſo iſt dadurch an ſich ſchon jeder Theil doppelt gröſſer, und damit iſt man der Verdoppelung des Sinus des halben Bogens überhoben. Uebrigens iſt für ſich klar, daß, ſobald der fürgegebene Winkel über 90 Gr. iſt, man beſſer thut, ſeinen Zuſatz zu 180 Gr. zu beſtimmen.

§. 7.

Was aber die Maaßſtäbe von verſchiedener Gröſſe betrift, ſo habe ich mir derſelben zehen ver-

verfertigt, deren jeder beynahe einen vierten Theil gröſſer iſt als der andere, und damit erhielte ich, daß mir der erſte ſtatt des 11ten, der 2te ſtatt des 12ten ꝛc. dienen konnte, weil der 11te würde zehnfach gröſſer als der erſte, und ſo auch der 12te zehnfach gröſſer als der 2te ꝛc. geweſen ſeyn. Dieſe Maaßſtäbe habe ich numerottirt, um allenfalls der Figur beyzuſchreiben, nach welchem ſie iſt gezeichnet worden, und ſo weiß ich mich immer wieder darein zu finden. Bey Zeichnung von krummen Linien geſchieht es zuweilen, daß ich die Ordinaten nach einem andern Maaßſtabe auftrage als die Abſciſſen, ſofern es nur auf die Verhältniſſe ankömmt. Und dieſes geſchieht, theils um der Gröſſe des Papieres Rechnung zu tragen, theils auch, um die Krümmung und Wendung der Linie augenſcheinlicher, oder überhaupt um die Figur und die Lage ihrer Theile zu andern Abſichten bequemer zu machen. Es wäre nicht unmöglich und vielleicht auch nicht undienlich, die Sprache von ſolchen Maaßſtäben allgemein zu machen. Man dürfte nur bey dem einen derſelben den Pariſiſchen, Rheinländiſchen oder Londonſchen Zoll zum Grunde legen, weil doch dieſe Maaſſe die bekannteſten ſind.

Digitized by Google

VII.
Anlage zur Tetragonometrie.

§. 1.

Die allgemeine Möglichkeit jedes Viereck durch Ziehung einer Diagonale in zween Triangel zu zerfällen, mag zu den Gedanken Anlaß gegeben haben, daß, wer in Berechnung und Aufloſung der Triangel wohl bewandert iſt, in der Berechnung und Aufloſung viereckigter Figuren ohne Mühe fortkommen werde. Solte dieſer Ausſpruch mehr als eine bloße Möglichkeit angeben, ſo wird gegenwärtige Abhandlung nur für Anfänger beſtimmt ſeyn, die ſich in trigonometriſchen Aufgaben, und beſonders in dem algebraiſchen Theile der Trigonometrie entweder für ſich, oder unter Anführung ihres Lehrers, üben, oder von daher Stof zu einer academiſchen Inauguraldiſputation nehmen wollen. Denn ich werde mich hier begnügen, die möglichen Fälle der Tetragonometrie vorzuzählen, und die Anzahl der dabey vorkommenden Aufgaben zu beſtimmen. Tab. I.

§. 2.

Wenn man ein Viereck, ohne es durch Ziehung einer Diagonale in zween Triangel zu thei-

theilen für ſich betrachtet, ſo beut es weiter nichts als 4 Seiten und 4 Winkel, demnach in allem 8 Stücke an. Und da iſt die Frage, wie fern einige dieſer 8 Stücke durch die übrigen beſtimmt werden, und wie vielerley Abwechſelungen dabey möglich ſind? Da man in der Algebra, ſofern es nur die Frage iſt, zu einer Gleichung zu gelangen, auf den Unterſchied der gegebenen und geſuchten Stücke nicht ſieht, ſo werde ich, um die vorzunehmende Abzählung einfacher zu machen, dieſen Unterſchied ebenfalls weglaſſen, weil derſelbe vielmehr die Auflöſung als die Erfindung der Gleichungen betrift.

§. 3.

Da in jedem Vierecke die Summe der vier Winkel 360 Gr. beträgt, ſo kann aus dreyen Winkeln der vierte für ſich gefunden werden. Es müſſen aber die Data von einander unabhängig ſeyn, demnach läßt ſich in Abſicht auf die Seiten des Viereckes aus allen vier Winkeln nicht mehr finden, als ſich aus dreyen finden läßt. Das will nun ſagen, daß in den Gleichungen, die wir zu ſuchen haben, höchſtens nur drey Winkel vorkommen können, weil der vierte immer der Zuſatz der drey übrigen zu 360 Gr. iſt.

§. 4.

Indeſſen ſind drey Winkel in ſo weit hinreichend, daß, wenn man noch zwo Seiten mit nimmt

nimmt, das ganze Viereck dadurch beſtimmt wird. Demnach kann von den zwoen andern Seiten noch eine mit in die Gleichung genommen werden. Und ſo haben wir den Satz, daß drey Winkel und drey Seiten einander beſtimmen. Da nun in dieſem Fall eine Seite und ein Winkel aus der Gleichung wegbleibt, ſo entſtehen, in Abſicht auf die Lage derſelben, zween beſondere Fälle. Denn es kann der wegbleibende Winkel entweder an der wegbleibenden Seite liegen, oder aber er liegt nicht an derſelben und demnach zwiſchen zwoen von den in der Gleichung vorkommenden Seiten. Da es nun hiebey, in Abſicht auf die Gleichung, nichts zu ſagen hat, zwiſchen welchen von den drey Seiten der wegbleibende Winkel fällt; ſo iſt es überflüßig, dieſen zweyten Fall noch ferner einzutheilen. Demnach haben wir für drey Seiten und drey Winkel nur zween Fälle.

§. 5.

Wird ein Winkel weggelaſſen, ſo muß der Abgang durch eine Seite erſetzt werden, und da haben wir vier Seiten und zween Winkel, die ebenfalls einander beſtimmen. Auch hier giebt es, in Abſicht auf die Lage der Winkel, noch zween beſondere Fälle, die ſich leicht gedenken laſſen. Denn die zween Winkel liegen entweder einander gegenüber, oder ſie liegen an einer Seite.

§. 6.

Weiter läßt ſich nun nicht gehen, weil ein Viereck nicht mehr als vier Seiten hat. Denn wolte man noch einen Winkel weglaſſen, ſo müßte noch eine Seite mit in die Gleichung genommen werden, und dieſes würde alſo die fünfte Seite des Viereckes ſeyn. Wir haben demnach in allem nur vier allgemeine Fälle, und mit dieſen vier Gleichungen. In jeder Gleichung kommen ſechs Stücke vor, und jedes kann als ein Quæſitum betrachtet werden. Dieſes giebt demnach für alle vier Gleichungen 24 Auflöſungen, und damit eben ſo viele einzelne Fälle.

§. 7.

Dieſe 24 Fälle werden in den vier erſten Figuren vorgeſtellt. Es enthält nemlich die

I^te Figur: Vier Seiten und zween entgegenſtehende Winkel. Und die dazu gehörende Gleichung iſt

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos.\omega - 2cd\cos.\psi.$$

II^te Figur: Vier Seiten und zween nicht entgegenſtehende Winkel. Und die Gleichung dazu iſt

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2a(b\cos.\omega + c\cos.\varphi) - 2bc\cos.(\omega + \varphi).$$

III^te Figur: Drey Seiten, zween auſſen an- und ein zwiſchenliegender Winkel. Die Gleichung dazu iſt

$$a\sin.\omega = c\sin.(\omega + \varphi) + d\sin.\lambda.$$

IV^te

IV^te Figur: Sechs auf einander folgende Stücke. Und die Gleichung dazu iſt

$$c\,\sin.\psi = a\,\sin.(\varphi+\psi) - b\,\sin.(\varphi+\psi+\omega).$$

In dieſen vier Gleichungen werden alle Winkel ſpitz genommen. Wenn ſie demnach bey vorkommenden Fällen ſtumpf ſind, oder wenn die Summen $\omega+\varphi$, $\varphi+\psi$, $\varphi+\psi+\omega$ ſtumpf oder vollends grösſer als 180 Grade ſind, ſo müſſen die Zeichen behörig verändert werden. Doch iſt dieſes erſt dann vorzunehmen, wenn die Gleichung aufgelöſt worden, weil bey den meiſten Auflöſungen die Functionen der Winkel noch ihre Geſtalt ändern. Man ſieht übrigens, daß nicht jede Auflöſung gleich einfach und geſchmeidig iſt, und daß beſonders alle ſechſerley Auflöſungen der zweyten Gleichung irrationale und doppelte Werthe geben.

§. 8.

Alle die 24 Fälle, welche in dieſen vier Gleichungen enthalten ſind, können in der practiſchen Feldmeßkunſt wirklich vorkommen, wo man ein viereckigtes Feld, wegen darauf und dazwiſchen liegenden Moräſten, Sümpfen und Waldungen, dem Umkreiſe nach, auszumeſſen genöthigt iſt, und wo ſich weder alle Seiten noch alle Winkel gleich leicht oder bequem wirklich meſſen laſſen.

Digitized by Google

§. 9.

Es ſind aber dieſe 24 Fälle noch lange nicht alle, ſondern nur diejenigen, wo man mit den Seiten und Winkeln am Umkreiſe ausreicht. Zerlegt man aber ein Viereck in zween Triangel, indem man eine Diagonale zieht, ſo iſt es auf ſehr vielerley Arten möglich, die gegebenen und geſuchten Stücke ſo zu vertheilen, daß nicht jeder der beyden Triangel für ſich beſtimmt, ſondern beyde zuſammengenommen werden müſſen, wenn man zur Gleichung gelangen will. Dieſe Bedingung macht, daß die darunter begriffene Fälle nicht zur eigentlich ſogenannten Trigonometrie, ſondern zur Tetragonometrie gehören, und ihre eigene Verwickelungen, Schwürigkeiten und Auflöſungen haben.

§. 10.

Dieſe Fälle habe ich von der 5ten Figur an bis zur 42ten vorgeſtellt, wie ich ſie nach einer etwas mühſamen Abzählung habe finden und in Ordnung bringen können. Jede dieſer Figuren hat eine ihr eigene Gleichung, und da in jeder ſechſerley Gröſſen vorkommen, deren jede als ein Quæſitum betrachtet werden kann, ſo giebt dieſes für die 38 Figuren 6 mal 38, oder 228 verſchiedene Fälle. Ich werde nun darüber folgende Anmerkung herſetzen.

§. 11.

In jeder dieſer Figuren ſind ſechs Stücke gezeichnet, welche in die Rechnung gezogen wer-

Digitized by Google

werden müſſen; und zwar die meiſten nur mit einem —. Wo aber einer der Winkel, durch welche die Diagonale geht, ganz vorkommt, da iſt in der Figur ein Bogen dadurch gezogen. In jeder Figur kömmt wenigſtens einer von dieſen Winkeln ganz oder ungetheilt vor, weil dadurch die beyden Triangel von einander abhängig gemacht werden. Aus eben dem Grunde kömmt entweder noch die Diagonal, oder einer von denen an derſelben liegenden Winkeln, oder auch beyde vor, jedoch dergeſtalt, daß in keinem Triangel mehr als drey ganz beſtimmte Stücke vorkommen, weil ſonſt in demſelben überflüßige Data und in dem andern Triangel zu wenig ſeyn würden.

§. 12.

Ich habe die Figuren in der Ordnung gezeichnet, wie ſie bey dem Abzählen muß vorgenommen werden. Und dieſes mag die Beſchreibung davon abkürzen. Der untere Diagonalwinkel kömmt in allen vor. Demnach blieben noch 5 Stücke zu zeichnen. Und da dabey vielerley Abwechſelungen möglich ſind, ſo habe ich, um ſie zu claſſificiren, bey der Diagonale angefangen. Dieſe kömmt in den Figuren 5, 6, 7 .... 25 vor, in den folgenden kömmt ſie nicht vor. Beyde dieſer Hauptclaſſen enthalten gleich viel Fälle, wenn man die 1, 2, 3, 4te Figur mit zu der letztern rechnet.

§. 13.

Die erſte Hauptclaſſe, wobey nemlich die Diagonal vorkömmt, theilt ſich in vier andere ein:

I°. Fig. 5, 6, 7 haben den obern Diagonalwinkel ganz.

II°. Fig. 8, 9, 10 haben deſſen beyde Theile.

III°. Fig. 11, 12 .... 19 haben nur einen Theil deſſelben.

IV°. Fig. 20 .... 25 haben keinen Theil deſſelben, und zwar

Fig. 20 vier Seiten.

Fig. 21, 22 drey Seiten und einen Winkel.

Fig. 23, 24, 25 zwo Seiten und zween Winkel.

§. 14.

Die zweyte Hauptclaſſe, wobey die Diagonale wegbleibt, iſt wiederum in Anſehung des obern Diagonalwinkels in zwo Claſſen Fig. 26 .... 31 und Fig. 32 .... 42, oder wenn man ſpecialer gehen will, in 6 Claſſen getheilt, nemlich

I. Fig. 26, 27, 28,	IV. Fig. 35, 36, 37,
II. Fig. 29, 30, 31,	V. Fig. 38, 39, 40,
III. Fig. 32, 33, 34,	VI. Fig. 41, 42.

§. 15.

Die Aufloͤſung aller dieſer Faͤlle werde ich, wie Anfangs geſagt worden, denen uͤberlaſſen, die

Digitized by Google

die ſich in dem algebraiſchen Theil der Trigonometrie üben wollen. Die Erfindung der Gleichung für jede Figur kömmt immer auf den untern ungetheilten Diagonalwinkel an. In allen Figuren der zweyten Hauptclaſſe ſcheint es, als wenn in dem einen Triangel nicht genug Stücke wären; allein da muß man vermittelſt der in den anliegenden Triangel vorkommenden Stücke die Diagonale beſtimmen. Dadurch erhält man für den erſtern Triangel das noch mangelnde Stück, und kann ſodann vermittelſt des untern Diagonalwinkels zur Gleichung gelangen. In der erſten Hauptclaſſe wird die Diagonal immer am mühſamſten gefunden, und bey verſchiedenen geht es auch nicht einmal durch Conſtruction leicht an. Ob übrigens alle die 228 Fälle in der Ausübung wirklich vorkommen und brauchbar ſind, werde ich eben nicht ſtückweiſe unterſuchen. Wenn man aber in der

8ten Figur die Diagonale,
29ten Figur den hintern Winkel,
30ten Figur die obere Seite

als ein Quæſitum anſieht, ſo enthalten dieſe Figuren eine Aufgabe, die eine von den ſchönſten und brauchbarſten in der practiſchen Geometrie iſt, und wovon ich in den Anmerkungen und Zuſätzen zur practiſchen Geometrie vier verſchiedene Auflöſungen gegeben habe.

VIII.
Anmerkungen über die Verwandlung und Auflöſung der Gleichungen.

§. 1.

Tab. II. Es iſt aus den Anfangsgründen der Algebra bekannt, daß die Auflöſung einer Gleichung vom vierten Grade von der Auflöſung einer cubiſchen Gleichung abhängt, auf welche ſich jene reduciren läßt, und daß, wenn bey jener alle vier Wurzeln entweder unmöglich oder real ſind, die drey Wurzeln der letztern real ſind. Da nun dieſer letztere Fall immer auf die Triſection eines Circulbogens reducirt werden kann, ſo ſieht man überhaupt leicht ein, daß ſich auch jede Biquadratgleichungen, deren Wurzeln ſämtlich entweder unmöglich oder real ſind, auf die Triſection eines Circulbogens ſolle können reduciren laſſen. Die Frage iſt nun, die Methode dazu zu finden und brauchbar zu machen.

§. 2.

Um in der Auflöſung dieſer Frage nicht ohne Noth Weitläuftigkeiten einzumengen, ſo werden wir ſetzen, daß in der fürgegebenen Biquadratgleichung das zweyte Glied weggeſchaft ſey, weil

Digitized by Google

weil dieſes in jedem Falle, ohne Mühe voraus geſchehen kann. Es ſey demnach

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C.$$

Man ſehe dieſe Gleichung als das Product zwoer Quadratgleichungen

$$0 = xx + ax + b$$
$$0 = xx - ax + c$$

an, welches

$$0 = x^4 + bx^2 + acx + bc$$
$$\quad\quad + c \quad - ab$$
$$\quad\quad - aa$$

iſt, ſo laſſen ſich durch die Vergleichung der Glieder die Coefficienten a, b, c durch A, B, C beſtimmen, und die geſuchten vier Wurzeln werden ſodann

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \surd(\tfrac{1}{4}aa - b)$$
$$x = +\tfrac{1}{2}a \pm \surd(\tfrac{1}{4}aa - c)$$

ſeyn. Wird nun die Vergleichung der Glieder angeſtellt, ſo iſt

$$A = b + c - aa$$
$$B = ac - ab$$
$$C = bc$$

demnach

$$c + b = A + aa \qquad 2c = A + aa + B : a.$$
$$c - b = B : a \qquad 2b = A + aa - B : a.$$
$$(c+b)^2 - (c-b)^2 = 4bc = 4C = (A + a^2)^2 - B^2 : a^2$$
$$4C = A^2 + 2a^2A + a^4 - B^2 : a^2$$

folglich

$$0 = a^6 + 2a^4A + A^2a^2 - B^2$$
$$\quad - 4Ca^2$$

Digitized by Google

Man ſetze

$$a^2 = z - \frac{2}{3} A$$

ſo iſt, wenn man dieſen Werth ſubſtituirt und die Reduction vornimmt,

$$0 = z^3 - \frac{1}{3} A^2 z - \frac{2}{27} A^3 - 4 C z + \frac{8}{3} C A - B^2$$

Man ſetze nun

$$z = r \text{ coſin. } v$$
$$r \text{ coſ. } 3 v = D$$

ſo giebt die Trigonometrie folgende Gleichung

$$0 = z^3 - \frac{3}{4} rr z - \frac{1}{4} rr D.$$

Wird dieſe mit der erſt gefundenen verglichen, ſo iſt

$$\frac{3}{4} rr = \frac{1}{3} A^2 + 4 C$$
$$\frac{1}{4} rr D = \frac{2}{27} A^3 - \frac{8}{3} C A + B^2$$

folglich

$$r = \frac{2}{3} \surd (12 C + A^2)$$
$$D = (2 A^3 - 72 C A + 27 B^2) : (36 C + 3 A^2)$$

Endlich, wenn man in den für x gefundenen zwo Gleichungen die für c, b gefundene Werthe ſetzt, ſo ſind alle vier Wurzeln

$$x = \pm \frac{1}{2} a + \surd (- \frac{1}{2} A - \frac{1}{4} a^2 \mp B : 2 a).$$

§. 3.

Wir haben nun nur den Rückweg zu nehmen, um die Operationen anzuzeigen, durch welche man die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 + A x^2 + B x + C$$

findet. Dieſes geſchiehet demnach folgendermaßen:

1°.

1°. Man macht

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(12C + AA)}$$

$$D = (2A^3 - 72CA + 27BB) : (36C + 3AA)$$

2°. Sodann ſetzt man

$$D : r = \operatorname{coſin.} 3v,$$

und nachdem man den Bogen 3 v gefunden, ſo ſucht man den Coſinus von v, und macht

$$r. \operatorname{coſ.} v = z$$

$$\sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)} = a.$$

3°. Hat man nun a gefunden, ſo ſind

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{2} - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{B}{2a}\right)}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{2} - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{B}{2a}\right)}$$

die geſuchte vier Wurzeln.

§. 4.

Es ſey z. E. die Gleichung

$$0 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$$

ſo iſt

$$A = -15$$

$$B = +10$$

$$C = +24$$

demnach

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(12.24 + 15.15)} = \tfrac{2}{3}\sqrt{513} = \sqrt{228}$$

$$D = \frac{-2.15^3 - 72.24.15 + 27.10.10}{36.24 - 3.15.15} = \frac{270}{19}$$

$$\operatorname{coſin.} 3v = D : r = 270 : 19\sqrt{228} =$$

$$135 : \sqrt{(3.19^3)}$$

$\tfrac{1}{2}$ log.

$$\tfrac{1}{2}\log.\,228 = \log.\,r = 1,1789674$$

$$\log.\,270 = 2,4313638$$
$$\log.\,19 = 1,2787536$$

$$\log.\,270:19 = 1,1526102$$

$$\log.\,\text{coſ}.\,3v = 0,9736428 - 1$$

demnach $3v = 19^\circ.\,45'.\,37\tfrac{1}{7}''$

$$v = 6.\ 35.\ 12\tfrac{1}{3}$$
$$\log.\,\text{coſ}.\,v = 0,9971238 - 1$$
$$\log.\,r = 1,1789674$$

$$\log.\,z \ldots\ldots = 1,1760912$$

$$z = 15$$

Ferner $a^2 = z - \tfrac{2}{3}A = 15 + 10 = 25$

$$a = 5$$

und

$$x = \tfrac{5}{2} \pm \surd\left(\tfrac{15}{2} - \tfrac{25}{4} - \tfrac{10}{10}\right) = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$
$$x = -\tfrac{5}{2} \pm \surd\left(\tfrac{15}{2} - \tfrac{25}{4} + \tfrac{10}{10}\right) = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$

demnach ſind die Wurzeln $+3, +2, -4, -1$.

§. 5.

Da ſich auf dieſe Art nur diejenigen Biquadratgleichungen auflöſen laſſen, welche alle Wurzeln entweder unmöglich oder real haben, ſo kömmt es darauf an, die Grenzen zu beſtimmen, in welchen ſolches möglich iſt. Man ſieht aus dieſer Auflöſung, daß es erſtlich auf den Ausdruck

$$D : r = \text{coſ}.\,3v$$

ankömmt.

ankömmt. Denn ein Coſinus kann nicht gröſſer als 1 ſeyn. Werden demnach für D, r die gefundenen Werthe geſetzt, ſo muß

$$(2A^3 - 72CA + 27B^2) : 2(12C + AA)^{3:2} < 1$$

folglich

$$2A^3 - 72CA + 27B^2 < 2(12C + AA)^{3:2}$$

ſeyn, und unter dieſer Bedingung ſind demnach alle vier Wurzeln entweder unmöglich oder real. Man ſieht zugleich, daß eben dieſe Bedingung vorausſetzt, es müſſe ſich aus

$$12C + AA$$

die Quadratwurzel können ausziehen laſſen, und folglich wenn C negativ iſt, 12 C kleiner als AA ſeyn. Beydes geht nun allemal an, wenn die vier Wurzeln ſämtlich entweder real oder unmöglich ſind, weil in dieſen Fällen die cubiſche Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = z^3 - \tfrac{1}{3}A^2 z & - \tfrac{2}{27}A^3 \\ - 4Cz & + \tfrac{8}{3}CA \\ & - BB \end{aligned}$$

drey reale Wurzeln hat. Es kömmt demnach ferners auf den Ausdruck

$$a = \sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)}$$

an, welcher ebenfalls real ſeyn muß, dafern in den Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-A - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{B}{2a}\right)}$$

$$x = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\left(-A - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{B}{2a}\right)}$$

keine andere Unmöglichkeit ſeyn ſolle, als die, welche

welche aus den Wurzelzeichen, womit ſie an ſich ſchon behaftet ſind, herrühren kann.

§. 6.

Da demnach hiebey ſo viele Bedingungen vorkommen, ſo iſt leicht zu erachten, daß die Möglichkeit aller vier Wurzeln in ſehr engen Schranken eingeſchloſſen ſeyn müſſen. Die allgemeine Methode, dadurch man ſonſt dieſe Frage entſcheidet, giebt an, man ſolle in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

das letzte Glied C als veränderlich anſehen, und beſtimmen, wenn es ein maximum oder ein minimum wird. Denn iſt es ſodann in der fürgegebenen Gleichung gröſſer als das maximum, oder kleiner als das minimum, ſo läßt ſich daraus ſchlieſſen, ob die Gleichung reale Wurzeln hat oder nicht. Wenn man dieſem zufolge die Gleichung differentirt und $dC = 0$ ſetzt, ſo erhält man

$$0 = 4x^3 + 2Ax + B$$

eine cubiſche Gleichung, welche man aufzulöſen hat, um diejenigen x zu beſtimmen, unter welchen C ein maximum oder ein minimum wird. Sind in dieſer Gleichung zwo Wurzeln unmöglich, ſo fallen dadurch ſchon zwo Wurzeln aus der fürgegebenen Biquadratgleichung ins Unmögliche, und C hat nur ein maximum zur Grenze der Möglichkeit der zwo übrigen Wurzeln.

§. 7.

§. 7.

Da hiebey eine Cubicgleichung aufzulöſen, bey der vorhergehenden Probe aber eine Triſection eines Circulbogens vorzunehmen iſt, welche ungefehr ebén ſo viel als eine Cubicgleichung ſagen will; ſo habe ich auf Mittel gedacht, beydes zu vermeiden, und die Grenzen der Möglichkeit der Wurzeln auf eine deutlichere und mehr in die Augen fallende Art kenntlich zu machen. Zu dieſem Ende merke ich an, daß, wenn man in der Gleichung

$$0 = x^4 + A x^2 + B x + C$$

das Zeichen des dritten Gliedes $+ B$ in $- B$ verwandelt, man dadurch an der Gleichung weiter nichts ändert, als daß die poſitive Wurzeln negativ, und hinwiederum die negativen poſitiv werden. Da dieſes auf die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln keinen Einfluß hat, ſo werde ich das Zeichen des dritten Gliedes, in dieſer Abſicht, als Gleichgültig anſehen.

§. 8.

Hingegen hat es mit dem Zeichen des zweyten und vierten Gliedes eine ganz andere Bewandniß. Ihre Verwechſelung hat in die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln, einen ſehr beträchtlichen Einfluß. Und beſonders muß der Fall, wo A poſitiv iſt, anders behandelt werden, als wo A negativ iſt, weil dieſer letztere Fall mehrere Umſtände darbeut.

Digitized by Google

Um demnach bey dem erſteren anzufangen, ſo ſetze ich

$$x^4 + Ax^2 = Bx - C = z$$

Hier iſt nun offenbar z poſitiv, es mag nun x poſitiv oder negativ ſeyn. Nimmt man auf
Fig. I. AP die Abſciſſen x, und richtet die Ordinaten

$$PM = z = x^4 + Ax^2$$

auf, ſo läßt ſich die Linie NAM conſtruiren, welches ebenfalls der andern Gleichung

$$z = Bx - C$$

genügen leiſten wird. Man ſieht zu dieſem Ende B als eine Tangente eines Winkels φ an, und indem man RAP $= \varphi$ macht, und die Linie AR zieht, ſo macht man AQ $= -C$, und zieht durch Q die Linie QM mit AR parallel. Denn ſo hat man, wenn AP $= x$ iſt,

$$PR = AP.\ \text{tang.}\ \varphi = Bx$$
$$RM = AQ = C$$

folglich $PM = Bx - C = z.$

§. 9.

Nun ſolte, wenn die Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 B \pm x + C$$

reale Wurzeln hat, die Linie QM allemal die krumme Linie NAM entweder berühren oder ſchneiden. Denn man muß für z einerley Werth finden, es ſey daß man $x^4 + Ax$ aus P in M trage, oder PM durch $Bx - C$ beſtimme. In der Figur iſt QM ſo gezogen, daß ſie die Linie NAM berühre. Und dieſes

macht,

Digitized by Google

macht, daß, ſo lange der Winkel RAP $=\varphi$ beybehalten wird, Q der tiefſte Punct iſt, der einen Durchſchnitt zulaſſe. Man ſieht daraus, daß wenn in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 \pm Bx + C$$

C poſitiv iſt, dieſes Glied eine gewiſſe Groͤſſe nicht uͤberſchreiten darf, wofern die Gleichung moͤgliche Wurzeln haben ſolle. Iſt aber C negativ, ſo faͤllt Q uͤber A, und da ſind zween Durchſchnittspuncten ſchlechthin nothwendig. Wenn demnach A poſitiv, C aber negativ iſt, ſo hat die Gleichung nothwendig zwo moͤgliche und zwo unmoͤgliche Wurzeln.

§. 10.

Iſt aber C poſitiv, ſo faͤllt Q unter A, und da ſind zuweilen zween Durchſchnitte moͤglich. Man ſieht leicht, daß dieſes theils von dem Winkel RAP, theils auch von der Groͤſſe der Linie AQ $=$ C abhaͤngt. Wir werden um beydes zu beſtimmen, den Winkel RAP aufſuchen, unter welchem, wenn AQ angenommen wird, QM die Linie NAM beruͤhrt. Denn man ſieht leicht, daß dieſes der kleinſte iſt, unter welchem Durchſchnitte moͤglich ſind. Es ſey demnach

$$AP = x,$$
$$PM = z$$
$$x^4 + Ax^2 = z,$$

ſo iſt $\text{tang.}\,\varphi = B = \frac{dz}{dx} = 4x^3 + 2Ax.$

$$PR = x\,\text{tang.}\,\varphi = 4x^4 + 2Ax^2$$
$$PM = z = x^4 + Ax^2$$

demnach

$$PR - PM = 3x^4 + Ax^2 = C$$
$$x = \surd(-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + C))$$

folglich

$$B = 4\left[-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{C}{3})\right]^{3:2} +$$
$$2A\left[-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{C}{3})\right]^{1:2}$$

Dieſes iſt demnach die kleinſte Tangente, unter welcher zween Durchſchnitte, und daher auch zwo Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 \pm Bx + C$$

möglich ſind. Wenn nemlich, wie wir es hier nehmen, A und C poſitiv ſind, ſo muß

$$B > 4\left[-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{C}{3})\right]^{3:2} +$$
$$2A[-\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

ſeyn.

§. 11.

Dieſe Formel würde gar keinen Werth geben, wenn man darin C negativ ſetzen wolte, es ſey denn, daß man auch A negativ machte. Dieſes will nun ſagen, daß nur in dem Fall, wo A negativ iſt, der Punct Q über der Linie AP, oder innert der Linie NAM ſey, und dadurch eine Tangente gezogen werden kann.

Wie

Wie dieſes möglich wird, werden wir nun noch unterſuchen, indem wir uns zu der Betrachtung des zweyten allgemeinen Falles wenden, in welchem nemlich A negativ iſt.

§. 12.

Es ſey demnach

$$x^4 - Ax^2 = + Bx - C = + z.$$

Man ſetze Fig. II.

$$AP = x$$
$$PM = z$$

ſo wird ſich vermittelſt der Gleichung

$$x^4 - Ax^2 = - z$$

die Linie N E B A M F L conſtruiren laſſen, welche allemal eine in A eingebogene Geſtalt hat, weil die kleinern Ordinaten anfangs negativ und erſt nachgehends poſitiv werden, nachdem $x^2 > A$ wird. Dieſe Linie hat ferner immer in A ein maximum, in E, F zwey minima, und zwiſchen E, A, F zween Wendungspuncten. Dieſes macht, daß ſich, jedoch unter gewiſſen Bedingungen, drey parallele Tangente ziehen laſſen, ſo ofte nemlich eine an dem eingebogenen Theile gezogen wird.

§. 13.

Hiebey giebt es nun, in Anſehung der Durchſchnitte, drey verſchiedene Fälle. Einmal, ſo oft eine Linie den eingebogenen Theil E A F durchſchneidet, ſo durchſchneidet ſie auch die auswertigen E N, F L. Man ſieht leicht, daß

die Linien EF, BD, deren erſtere die beyden minima berührt, die andere aber die Tangente bey dem Wendungspunct B iſt, die äuſſerſten von denen ſind, welche vier Durchſchnitte machen können, und daß eben ſo der Winkel BDC unter allen der kleinſte iſt, imgleichen daß jede Linie, welche vier Durchſchnitte machen ſolle, zwiſchen C und D durchgehen müſſe, folglich in der Gleichung das vierte Glied, wenn es poſitiv iſt, nicht gröſſer als AD, und wenn es negativ iſt, nicht gröſſer als AC ſeyn könne, dafern alle vier Wuzreln ſollen können real ſeyn. Dieſe zween Grenzpuncten laſſen ſich nun leicht beſtimmen. Denn für C wird z ein minimum, demnach

$$dz = (4x^3 - 2Ax)\,dx = 0$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}A}$$

$$AC = x^4 - Ax^2 = \tfrac{1}{4}A^2 - \tfrac{1}{2}A^2 = -\tfrac{1}{4}A^2$$

Sodann wird D durch die Tangente des Wendungspunct beſtimmt. Für dieſen iſt

$$ddz = (12x^2 - 2A)\,dx^2 = 0$$

$$AG = x = \sqrt{\tfrac{1}{6}A}$$

$$GB = x^4 - Ax^2 = \tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{6}A^2 = -\tfrac{5}{36}A^2$$

Es iſt aber

$$(GB + AD) : AG = dz : dx = 4x^3 - 2Ax = -\tfrac{4}{3}A\sqrt{\tfrac{1}{6}A},$$

folglich

$$(\tfrac{5}{36}A^2 + AD) : \sqrt{\tfrac{1}{6}A} = \tfrac{4}{3}A\sqrt{\tfrac{1}{6}A}$$

$$AD = \tfrac{4}{18}A^2 - \tfrac{5}{36}A^2 = \tfrac{1}{12}A^2.$$

§. 14.

Fällt demnach das vierte Glied zwiſchen CD, ſo ſind zwo Wurzeln nothwendig real, und die zwo andern können es ſeyn, wenn B nicht zu groß iſt. Es ſey z. E. das vierte Glied $C = AQ$. Man ziehe aus Q die Tangente QM, und durch M die Ordinate MP; ſo iſt

$$AP = x$$
$$PM = +z$$

Nun iſt $x^4 - Ax^2 = +z$

$$\frac{dz}{dx} = \text{tang. } MTP = 4x^3 - 2Ax = +B$$

$$Qm = -Bx = 4x^4 - 2Ax^2$$
$$PM \qquad = x^4 - Ax^2$$
$$Qm - PM = 3x^4 - Ax^2 = +C.$$

Dieſes giebt nun eben ſo wie vorhin (§. 10.)

$$B = 4\left[+\tfrac{1}{6}A \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \frac{C}{3}\right)}\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{1:2}$$

welches demnach die Lage der aus dem Punct Q gezogenen Tangente angiebt, welche zugleich die Grenzlinie der realen Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 - Ax^2 \pm Bx \pm C$$

iſt. Wir werden nun ſehen, wie ſich dieſe Grenzen nach den verſchiedenen Werthen des letzten Gliedes C richten. Und da haben wir folgende Fälle:

I°. Wenn C poſitiv iſt, ſo fällt Q unterhalb A. Iſt nun in dieſem Fall C gröſſer als $\frac{1}{4}A^2$, ſo fällt Q unter die Linie EF, zwo Wurzeln ſind unmöglich, und ſollen die übrigen beyden möglich ſeyn, ſo muß

$$B > 4\left[+\tfrac{1}{6}A + \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A + \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)\right]^{1:2}$$

ſeyn, widrigenfalls ſind alle vier unmöglich.

II. Iſt aber C kleiner als $\frac{1}{4}A^2$, ſo fällt Q zwiſchen AC, und da ſind zwo Wurzeln nothwendig real. Sollen es die beyden andern auch ſeyn, ſo muß

$$B < 4\left[+\tfrac{1}{6}A + \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A + \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)\right]^{1:2}$$

ſeyn. Denn in dieſem Fall hat die Tangente QM eine umgekehrte Lage, weil ſie in EF durch den 90ten Grad geht.

III. Iſt hingegen C negativ und kleiner als AD, ſo fällt Q nicht nur über A, ſondern die Formel giebt, in dieſem Fall, für B zween reale Werthe. Dieſes will nun ſagen, daß wenn z. E. C = Aq iſt, durch den Punct q zwo Tangenten qk, qn können gezogen werden. Demnach muß in dieſem Falle

$$B < 4\left[+\tfrac{1}{6}A + \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C\right)\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A + \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C\right)\right]^{1:2}$$

und

$$B > 4\left[+\tfrac{1}{6}A - \surd\left(\tfrac{1}{36}A - \tfrac{1}{3}C\right)\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A - \surd\left(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C\right)\right]^{1:2}$$

ſeyn.

Digitized by Google

ſeyn. Wiedrigenfalls ſind nur zwo Wurzeln real.

IV. Iſt endlich C negativ und gröſſer als AD, ſo giebt die Formel für B gar keinen realen Werth. Das will nun ſagen, man könne durch den Punct Q, wenn derſelbe über D hinauf fällt, keine Tangente ziehen. Es ſind auch in dieſem Fall nothwendig zwo Wurzeln real, und zwo unmöglich.

§. 15.

Wenn in der Gleichung das Glied $B = 0$ iſt, ſo laſſen ſich alle dieſe Formeln ſehr abkürzen. Denn ſo ſind

I°. in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + C$$

alle vier Wurzeln unmöglich.

II. In der Gleichung

$$0 = x^4 \pm Ax^2 - C$$

ſind immer zwo Wurzeln real und zwo unmöglich.

III. In der Gleichung

$$0 = x^4 - Ax^2 + C$$

ſind alle vier Wurzeln real, wenn C kleiner als $\frac{1}{4}A^2$ iſt. Iſt aber C gröſſer als $\frac{1}{4}A^2$ ſo ſind alle vier Wurzeln unmöglich. Alles dieſes erhellet auch daraus, daß die Gleichung

$$0 = x^4 - ax^2 + b^2$$

aufgelöſt, die Wurzeln

$$2x = \pm\surd(a + 2b) \pm \surd(a - 2b)$$ giebt.

§. 16.

Iſt hingegen der zweyte Coefficient $A = 0$, ſo haben wir die erſte Figur, und da ſind immer zwo Wurzeln unmöglich. Die übrigen zwo ſind real, wenn C negativ iſt. (§. 9.) Iſt aber C poſitiv, ſo ſind dieſe zwo Wurzeln nur alsdann real, wenn

$$B > 4\left(\frac{C}{3}\right)^{3:4}$$

oder $$27 B^4 > 256 C^3$$ iſt.

§. 17.

Man wird übrigens aus dem §. 10. und §. 14. erſehen, daß die hier gebrauchte Methode deswegen angieng, weil ſich aus der Gleichung

$$3x^4 \pm Ax^2 = C$$

die Wurzel ſehr leicht ausziehen lieſſe. Ungeachtet aber dieſes Verfahren bey höhern Gleichungen ſo unbedingt nicht angeht, ſo finden ſich doch ganze Claſſen derſelben, bey denen es angebracht werden kann. So z. E. laſſen ſich auf dieſe Art bey jeder Gleichung von drey Gliedern

$$x^m + Ax + B = 0$$

und ſo auch bey jeder Gleichung von folgender Form

$$x^{2m} + Ax^m + Bx + C = 0$$

die Anzahl der realen Wurzeln und die Schranken ihrer Möglichkeit beſtimmen. Ich werde mich aber hier dabey nicht lange aufhalten, ſondern zu andern Betrachtung fortſchreiten, die ſich über die Gleichungen machen laſſen.

§. 18.

§. 18.

Seit dem man gefunden, daß jede Gleichung als ein Product von einer gewiſſen Anzahl Gleichungen vom erſten Grade angeſehen werden kann, und daß ſich mit den Wurzeln verſchiedene Veränderungen vornehmen laſſen, ſo hat man mit ſolchen Veränderungen verſchiedene Proben gemacht, und zu dem Ende für die Wurzel x, bald $y \pm a$, bald y a, bald y : a, bald auch y^n geſetzt, und dadurch die Gleichung in eine andere verwandelt, die man zu verſchiedenen Abſichten beſſer gebrauchen konnte. Beſonders wird, wenn man $x = y^n$ ſetzt, und n eine ganze Zahl iſt, die Gleichung in eine andere verwandelt, welche von n mal höherm Grade iſt, und daher n mal mehr Wurzeln hat. Sind hiebey alle Wurzeln x negativ, ſo werden alle Wurzeln y unmöglich, ſo oft n eine gerade Zahl iſt. Und ſo viele Wurzeln x negativ ſind, wird man n mal ſo viel unmögliche Wurzeln y haben. Sind hingegen alle Wurzeln x poſitiv, und n iſt eine gerade Zahl, ſo wird man für jede Wurzel x zwo mögliche, und $n - 2$ unmögliche Wurzeln y haben. Iſt aber n eine ungerade Zahl, ſo erhält man für jede Wurzel x eine mögliche, und $n - 1$ unmögliche Wurzeln. Sind endlich einige Wurzeln x unmöglich, ſo erhält man für jede derſelben n unmögliche Wurzeln y. Alles dieſes folgt ohne Mühe aus der Gleichung

$$y^n - x = 0.$$

§. 19.

Will man hiebey für n eine gebrochene Zahl ſetzen, z. E. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ꝛc. ſo wird man mehrentheils eine Gleichung erhalten, worin die Exponenten von y gebrochne Zahlen ſind, und damit läßt ſich nicht viel ausrichten. Ich ſage mehrentheils: denn hat x an ſich ſchon ſolche Dignitäten, die ſich durch einen Bruch n aufheben, oder auf ganze Zahlen bringen laſſen, ſo iſt dieſes ein Fall, bey welchem man ſchon oft mit Vortheil $y^n = x$ geſetzt hat. So z. E. hatten wir oben (§. 2.) die Gleichung

$$0 = a^6 + 2a^4A + A^2a^2 - B^2. \\ - 4Ca^2$$

Da ſich hier alle Exponenten von a durch 2 dividiren laſſen, ſo kann man

$$a = y^{1:2}$$

ſetzen, und dadurch die Gleichung in

$$0 = y^3 + 2Ay^2 + A^2y - B^2 \\ - 4Cy$$

verwandeln, welche nun nur vom dritten Grade iſt. Dieſes wäre nun nicht angegangen, wenn in der erſten Gleichung ungerade Exponenten von a vorgekommen wären.

§. 20.

Man hätte ſich aber nach der Betrachtung der bisher erwähnten Verwandlungen zu folgenden Aufgaben wenden können, die wir hier auflöſen werden: **Eine Gleichung von jedem**

Digitized by Google

dem Grade in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln Quadrate, Cubi oder jede Dignitäten von den Wurzeln der erſtern ſind? Ungeachtet die Methode zur Auflöſung dieſer Aufgabe allgemein iſt, ſo werden wir doch bey den Quadraten anfangen, weil dieſer eine beſondere Auflöſung der Aufgabe zulaſſen.

§. 21.

Es ſey demnach eine jede Wurzel der fürgegebenen Gleichung

$$x + a = o.$$

Man nehme ganz willkührlich noch eine andere

$$x - a = o$$

und multiplicire dieſe beyde Gleichungen mit einander, ſo hat man

$$x^2 - a^2 = o.$$

Man ſetze nun

$$x^2 = y$$

ſo iſt

$$y - a^2 = o$$

demnach y das Quadrat der Wurzel x. Hiebey haben wir nun weiter nichts gethan, als daß wir zu der Wurzel — a noch eine andere + a genommen haben. Es mag nun a poſitiv oder negativ ſeyn, ſo erhält man immer

$$y - a^2 = o$$

eine poſitive Wurzel der neuen Gleichung. Da man aber die Gleichung vorerſt auflöſen müſte, wenn man dieſes mit jeder Wurzel x beſonders vor-

vornehmen wolte, ſo haben wir nur noch zu ſehen, wie es ohne die Aufloͤſung der Gleichung geſchehen kann.

§. 22.

Nun weiß man, daß bey jeder Gleichung die poſitiven Wurzeln in negative, und die negativen in poſitive verwandelt werden, wenn man bey dem zweyten, vierten, ſechſten ꝛc. Gliede das Zeichen verwechſelt. Man darf daher nur die Gleichung, ſo durch dieſe Verwechslung der Zeichen entſteht, mit der fuͤrgegebenen multipliciren, ſo werden in dem Product alle ungerade Dignitaͤten von $x = 0$, und damit kann man $x^2 = y$ ſetzen, um die Gleichung zu erhalten, deren Wurzeln Quadrate von den Wurzeln der fuͤrgegebenen Gleichung ſind.

§. 23.

Es ſey demnach uͤberhaupt

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

ſo macht man

$$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

Werden nun dieſe Gleichungen mit einander multiplicirt, ſo iſt

$$\begin{array}{llll} 0 = x^{2m} + 2b\,x^{2m-2} & + 2d\,x^{2m-4} & + 2f\,x^{2m-6} & + \text{ꝛc.} \\ \quad\;\; - aa\,.. & - 2ac\,.. & - 2ae\,.. & \\ & + bb\,.. & + 2bd\,.. & \\ & & - cc\,.. & \end{array}$$

Setzt

Setzt man demnach

$$xx = y$$

ſo erhält man

$$\begin{array}{lllll} o = y^m + 2b\,y^{m-1} & + 2d\,y^{m-2} & + 2f\,y^{m-3} & + \text{ꝛc.} \\ \quad - aa.. & - 2ac.. & - 2ae.. & \\ & + bb.. & + 2bd.. & \\ & & - cc.. & \end{array}$$

eine Gleichung deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der Gleichung

$$o = x^m + a\,x^{m-1} + b\,x^{m-2} + e\,x^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

ſind. Wir werden nun hievon ein und andern Gebrauch machen.

§. 24.

Es ſey z. E. die cubiſche Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

wird dieſe mit

$$o = x^3 - ax^2 + bx - c$$

multiplicirt, und in dem Producte $x^2 = y$ geſetzt, ſo erhält man

$$\begin{array}{llll} o = y^3 & + 2by^2 & - 2acy & - cc \\ & - aay^2 & + bby & \end{array}$$

Es iſt unnöthig zu erinnern, daß man jede der Coefficienten a, b, c negativ nehmen könne, wenn in einem fürgegebenen Fall nicht alle Glieder poſitiv ſind.

§. 25.

Man ſetze nun die letzte Gleichung

$$o = y^3 + Ay^2 + By - CC,$$

ſo

ſo kann man den Rückweg nehmen, und die erſtere wiederum daraus herleiten, indem man die Coefficienten a, b, c durch A, B, C beſtimmt. Dieſes will ſodann ſagen: Wenn eine cubiſche Gleichung gegeben, eine andere zu finden, deren Wurzeln Quadratwurzeln der erſten ſind. Dieſe Aufgabe iſt nun nicht mehr ſo einfach, wie die vorhergehende, weil man an ſtatt einer Gleichung mehrere findet, die der Bedingung genügen leiſtet. Denn jede Quadratzahl hat ſowohl eine poſitive als negative Wurzel, und beyde thun der Bedingung ein Genügen. Man ſetze die Wurzeln der Gleichung

$$o = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

ſeyn p^2, q^2, r^2, ſo ſind die Quadratwurzeln davon

$$\begin{matrix} +p, & +q, & +r \\ -p & -q & -r \end{matrix}$$

aus dieſen laſſen ſich nun 8 cubiſche Gleichungen machen, deren Wurzeln

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$+p$	$+p$	$+p$	$+p$	$-p$	$-p$	$-p$	$-p$
$+q$	$+q$	$-q$	$-q$	$+q$	$+q$	$-q$	$-q$
$+r$	$-r$	$+r$	$-r$	$+r$	$-r$	$+r$	$-r$

ſind. Man würde daher auf eine Gleichung vom 8ten Grade verfallen, wenn der letzte Coefficient $CC = cc$ nicht an ſich ſchon zwo allgemeine Claſſen angäbe, wodurch die Gleichung auf den vierten Grad herunter geſetzt wird.

§. 26.

§. 26.

Um aber die Auflöſung vorzunehmen, ſo haben wir

$$cc = CC \text{ und daher } c = C$$

$$2b - aa = A$$

$$bb - 2ac = B = bb - 2aC$$

Hieraus findet man

$$0 = a^4 + 2Aa^2 - 8Ca + \begin{matrix} A^2 \\ -4B \end{matrix}$$

§. 27.

Dieſe Gleichung werde ich eben hier nicht auflöſen, ſondern noch einen andern Rückweg nehmen, und zeigen, wie wenn man jede Glei- vom vierten Grade, deren zweytes Glied = o chung iſt, mit der gegenwärtigen vergleicht, man auf die cubiſche Gleichung

$$0 = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

kommen, und nachdem man ihre Wurzeln p^2, q^2, r^2 gefunden, ſodann auch die Wurzeln der Gleichung vom vierten Grade haben könne, welche man mit

$$0 = a^4 + 2Aa^2 - 8Ca + \begin{matrix} A^2 \\ -4B \end{matrix}$$

verglichen hatte. Denn da a der Coefficient des zweyten Gliedes der Gleichung

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

und folglich die Summe ihrer Wurzeln iſt, ſo iſt

$$a = p + q + r.$$

§. 28.

Da es genug iſt, dieſes Verfahren in einem Beyſpiele zu zeigen, ſo werde ich die oben (§. 4.) ſchon gebrauchte Gleichung

$$0 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$

oder, wenn wir a für x ſetzen

$$0 = a^4 - 15a^2 + 10a + 24$$

dazu gebrauchen. Dieſe mit

$$0 = a^4 + 2Aa^2 - 8C + A^2 \atop \qquad\qquad\qquad - 4B$$

verglichen, giebt

$$A = -\tfrac{15}{2}$$
$$C = -\tfrac{5}{4}$$
$$B = +\tfrac{129}{16}$$

demnach, wenn dieſe Werthe in der Gleichung

$$0 = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

geſetzt werden,

$$0 = y^3 - \tfrac{15}{2}y^2 + \tfrac{129}{16}y - \tfrac{25}{16}$$

eine cubiſche Gleichung, von deren Auflöſung die Auflöſung der fürgegebenen Gleichung vom 4ten Grade abhängt.

§. 29.

Man ſetze, um erſtlich die Brüche aufzuheben,

$$y = \tfrac{1}{4}v$$

ſo iſt

$$0 = v^3 - 30v^2 + 129v - 100$$

Ferner

Ferner ſetze man, um das zweyte Glied wegzuſchaffen,

$$v = z + 10,$$

ſo iſt

$$0 = z^3 - 171z - 810.$$

Vergleicht man dieſe Gleichung eben ſo wie oben (§. 2.) mit

$$0 = z^3 - \tfrac{3}{4}rrz - \tfrac{1}{4}rrD,$$

ſo findet man

$$\tfrac{3}{4}rr = 171$$

$$\tfrac{1}{4}rrD = 810$$

folglich

$$r = \sqrt{228}$$

$$D = \frac{270}{19}$$

welches eben die Werthe ſind, die wir oben (§. 4.) gefunden haben. Wir haben demnach auf eben die Art die Wurzel $z = 15$, und damit die beyden uͤbrigen $z = -6$ und $z = -9$. Da nun $v = z + 10$ iſt, ſo ſind 25, 4, 1 die drey Werthe von v, und eben ſo $\frac{25}{4}$, 1, $\frac{1}{4}$ die drey Werthe von y. Da nun $y = x^2$ iſt, ſo ſind $\pm\frac{5}{2}$, ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ die drey Werthe von x. Nun iſt a deren Summe, demnach iſt

$$a = \pm\tfrac{5}{2} \pm 1 \pm \tfrac{1}{2}$$

dieſes giebt achterley Werthe, von denen wir aber nur

$$a = +\tfrac{5}{2} + 1 - \tfrac{1}{2} = +3$$

$$a = +\tfrac{5}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} = +2$$

$$a = -\tfrac{5}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} = -4$$

$$a = -\tfrac{5}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = -1$$

gebrauchen, welche der fürgegebenen Gleichung Genügen thun.

§. 30.

So ofte in der Gleichung (§. 23.)

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$

alle Wurzeln real ſind, ſie mögen nun poſitiv oder negativ ſeyn, ſo ofte ſind auch in der andern Gleichung

$$\begin{array}{lllll} 0 = y^m & + 2b\,y^{m-1} & + 2d\,y^{m-2} & + 2f\,y^{m-3} & + \text{etc.} \\ & - aa & - 2ac.. & - 2ae.. & \\ & & + bb.. & + 2bd.. & \\ & & & - cc.. & \end{array}$$

die Wurzeln nicht nur real, ſondern ſämtlich poſitiv, weil ſie Quadrate von den Wurzeln x ſind. Wird demnach dieſe zweyte Gleichung in Zahlen gerechnet, ſo wird ſich jedesmal finden, daß die Zeichen + — der Ordnung nach abwechſeln.

§. 31.

Findet ſich aber dieſe einförmige Abwechſelung nicht, ſo iſt es nothwendig ein Zeichen, daß in der erſten Gleichung einige Wurzeln unmöglich ſeyn müſſen. Es ſey z. E. die Gleichung

$$0 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

wird dieſe mit

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

multiplicirt, ſo iſt das Product, wenn man $x^2 = y$ ſetzt,

$$0 = y^4 + 4y^3 + 10y^2 + 4y + 1.$$

Digitized by Google

Da nun hier gar keine Abwechſelung der Zeichen iſt, ſo hat die Gleichung

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

nothwendig unmögliche Wurzeln.

§. 32.

Es läßt ſich aber dieſe Anmerkung nicht umkehren, weil der unmöglichen Wurzeln ungeachtet, die Zeichen zuweilen dennoch einförmig abwechſeln können. Um dieſes auf eine allgemeinere Art aufzuklären, und zugleich die Umſtände zu beſtimmen, wo die Abwechſelung der Zeichen auch bey den unmöglichen Wurzeln ſtatt hat, ſo ſey eine derſelben

$$0 = x + a + b\sqrt{-1}.$$

Sind nun alle Coefficienten der Gleichung rational, ſo hat die Gleichung nothwendig noch eine andere Wurzel von der Form

$$0 = x + a - b\sqrt{-1}.$$

Werden dieſe beyden Wurzeln mit einander multiplicirt, ſo iſt das Product

$$0 = x^2 + 2ax + aa \atop \qquad\qquad\quad + bb$$

ein Factor der Gleichung. Man nehme nun den Factor

$$0 = x^2 - 2ax + aa \atop \qquad\qquad\quad + bb$$

und multiplicire damit den erſtern, ſo iſt, wenn man $x^2 = y$ ſetzt, das Product

$$0 = y^2 + 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

der correſpondirende Factor derjenigen Gleichung, deren Wurzeln y, Quadrate der Wurzeln x werden ſollen. Iſt nun hiebey a > b, ſo wird in dieſem Factor das zweyte Glied negativ, und damit hat, der unmöglichen Wurzel unerachtet, die Abwechſelung der Zeichen ſtatt. Man ſieht leicht, daß eine Gleichung von lauter unmöglichen Wurzeln aus lauter ſolchen Wurzeln

$$0 = x \pm a \pm b\sqrt{-1}$$

wo a > b iſt beſtehen, und damit in der zweyten Gleichung (§. 30.) eine einförmige Abwechſelung der Zeichen ſtatt finden kann. Man ſieht aber auch, daß, wenn in allen Wurzeln a < b iſt, alsdann in dieſer zweyten Gleichung nothwendig alle Zeichen + ſind. Miſchen ſich aber beyde Fälle durcheinander, oder kommen zu den unmöglichen Wurzeln noch reale hinzu, ſo kann man für die Folge und Abwechſelung der Zeichen keinen ſo unbedingten Schluß machen, ungeachtet man, wenn die Abwechſelung der Zeichen nicht durchgängig iſt, ſicher ſchlieſſen kann, daß in der erſten Gleichung unmögliche Wurzeln ſeyn müſſen.

§. 33.

Wenn man zu dem Factor

$$0 = y^2 + 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

den Factor

$$0 = y^2 - 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

nimmt, und indem man beyde mit einander multi-

multiplicirt, in dem Producte $y^2 = z$ ſetzt, ſo erhält man

$$o = z^2 - 2(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)y^2 + (aa+bb)^4$$

einen Factor derjenigen Gleichung, deren Wurzeln Biquadrate von x ſind. In dieſem Factor iſt nun das zweyte Glied alsdenn negativ, wenn

$$a^4 + b^4 > 6a^2b^2$$

oder $$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > 8a^2b^2$$

oder $$a^2 + b^2 > 2ab\sqrt{2}$$

iſt, welches ſich zuträgt, ſo ofte entweder

$$a > b(1 + \sqrt{2})$$

oder $$b > a(1 + \sqrt{2})$$

iſt. Da demnach hier nur erfordert wird, daß a, b in gröſſerer Verhältniß ungleich ſeyn, als 1 zu $1 + \sqrt{2}$ iſt; ſo trägt ſich dieſes öfters zu, als die Bedingung bey den Quadraten, welche fordert, daß $a > b$ ſeyn müſſe. Es kann daher auch leichter geſchehen, daß eine Abwechſelung der Zeichen ſtatt findet, wenn man eine Gleichung in eine ſolche verwandelt, deren Wurzeln Biquadrate der Wurzeln der erſtern ſind. Indeſſen kann allerdings auch das Gegentheil zutreffen.

§. 34.

So z. E. haben wir vorhin (§. 31.) geſehen, daß die Gleichung

$$o = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

mit

$$o = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

 mul-

multiplicirt, und in dem Producte $x^2 = y$ geſetzt, ſich in

$$0 = y^4 + 4y^3 + 10y^2 + 4y + 1$$

verwandelt. Wird nun ferner auch dieſe mit

$$0 = y^4 - 4y^3 + 10y^2 - 4y + 1$$

multiplicirt, und in dem Producte $y^2 = z$ geſetzt, ſo erhält man

$$0 = z^4 + 6z^3 + 70z^2 + 6z + 1$$

eine Gleichung, deren Wurzeln Biquadrate von x ſind. Und hier findet ſich gar keine Abwechſelung der Zeichen ein.

§. 35.

Nach der bisher angeführten Methode, kann nun ſtuffenweiſe eine jede Gleichung in eine ſolche verwandelt werden, deren Wurzeln die 2^{nte} Dignität von den Wurzeln der erſten ſind. Wir haben demnach noch zu ſehen, wie man in Anſehung der übrigen Dignitäten, die in der Reihe 2, 4, 8, 16, 32, ꝛc. nicht begriffen ſind, zu verfahren habe. Wir werden die Methode nur in einem Beyſpiele vortragen, woraus ſich aber leicht wird abnehmen laſſen, daß ſie allgemein iſt.

§. 36.

Es ſey z. E. die Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

in eine ſolche

$$0 = z^2 + \alpha x + \beta$$

zu verwandeln, ſo, daß die Wurzeln der letztern Cubi der Wurzeln der erſtern ſeyn. Da demnach die letztere Gleichung wegen $z = x^3$, ſich in

$$0 = x^6 + \alpha x^3 + \beta$$

verwandelt, ſo ſieht man leicht, daß die erſtere

$$0 = x^2 + ax + b$$

mit

$$0 = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

multiplicirt, und in dem Producte

$$\begin{aligned} 0 = x^6 + Ax^5 &+ Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 \\ + a.. &+ aA.. + aB.. + aC.. + aDx \\ &+ b.. + bA.. + bB.. + bC.. + bD \end{aligned}$$

das zweyte, dritte, fünfte und ſechſte Glied $= 0$ geſetzt werden müſſe, theils um die vier Coefficienten A, B, C, D zu beſtimmen, theils auch, um die übrigen Glieder

$$\begin{aligned} 0 = x^6 + Cx^3 &+ bD \\ + aB.. & \\ + bA.. & \end{aligned}$$

mit der geſuchten Gleichung

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

oder

$$0 = z^6 + \alpha x^3 + \beta$$

zu vergleichen. Wir haben demnach, um der erſten Abſicht Genügen zu thun,

$$0 = A + a$$
$$0 = B + aA + b$$
$$0 = D + aC + bB$$
$$0 = aD + bC$$

vier Gleichungen vom erſten Grade, aus denen man

$$A = -a$$
$$B = +aa - b$$
$$C = ab$$
$$D = bb$$

erhält. Da nun nach der zweyten Abſicht

$$\alpha = C + aB + bA$$
$$\beta = bD$$

iſt, ſo erhält man hiedurch die geſuchte Gleichung

$$0 = z^2 - 3abz + b^3$$
$$+ a^3 \ldots$$

deren Wurzeln die Cubi der Wurzeln von

$$0 = x^2 + ax + b$$

ſind.

§. 37.

Es ſey z. E.

$$0 = x^2 - 10x + 9$$

eine Gleichung, deren Wurzeln offenbar 1 und 9 ſind; ſo iſt

$$a = -10$$
$$b = +9$$

demnach

$$a^3 - 3ab = -1000 + 270 = -730$$
$$b^3 = 729$$

und

$$0 = z^2 - 730z + 729$$

eine Gleichung deren Wurzeln wiederum offenbar 1 und 729, folglich die Cubi von 1 und 9 ſind.

§. 38.

Digitized by Google

§. 33.

Um noch ein Beyſpiel anzubringen, ſo ſey die cubiſche Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

und dieſe ſolle in eine andere

$$o = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

verwandelt werden, ſo, daß die Wurzeln der letztern die Cubi der Wurzeln der erſtern ſeyn. Da nun hier $z = x^3$ iſt, ſo verwandelt ſich die letztere Gleichung in

$$o = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma.$$

Da dieſe vom neunten Grade iſt, ſo muß die fürgegebene

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

mit einem Factor oder Gleichung vom ſechſten Grade

$$o = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

multiplicirt, und in dem Producte

$$\begin{array}{llllllll} o = x^9 & + Ax^8 & + Bx^7 & + Cx^6 & + Dx^5 & + Ex^4 & + Fx^3 & \\ & + a.. & + aA.. & + aB.. & + aC.. & + aD.. & + aE.. & + aFx^2 \\ & & + b.. & + bA.. & + bB.. & + bC.. & + bD.. & + bE.. + bFx \\ & & & + c.. & + cA.. & + cB.. & + cC.. & + cD.. + cE.. + cF \end{array}$$

das 2, 3, 5, 6, 8, 9te Glied $= o$ geſetzt werden, um die Coefficienten A, B, C, D, E, F zu beſtimmen, und ſodann die übrigen Glieder

$$\begin{array}{llll} o = x^9 + & Cx^6 & + Fx^3 & + cF \\ & + aB.. & + aE.. & \\ & + bA.. & + bD.. & \\ & + C.. & + cC.. & \end{array}$$

mit

$$0 = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma$$

zu vergleichen. Wir haben demnach

$$0 = A + a$$
$$0 = B + aA + b$$
$$0 = D + aC + bB + cA$$
$$0 = E + aD + bC + cB$$
$$0 = aF + bE + cD$$
$$0 = bF + cE$$

ſechs Gleichungen vom erſten Grade, durch deren Aufloͤſung man

$$A = -a$$
$$B = +aa - b$$
$$C = +2c - ab$$
$$D = +bb - ac$$
$$E = -cb$$
$$F = +cc$$

findet. Da nun ferner

$$\alpha = C + aB + bA + c$$
$$\beta = F + aE + bD + cC$$
$$\gamma = cF$$

iſt, ſo haben wir nur noch die gefundenen Werthe von A, B, C, D, E, F in dieſen drey Gleichungen zu ſetzen, um die Coefficienten α, β, γ der geſuchten Gleichung

$$0 = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

zu beſtimmen, welche demnach folgende

$$\begin{aligned} 0 = z^3 &+ 3cz^2 + 3ccz + c^3 \\ &- 3ab \;.. - 3abc \;.. \\ &+ a^3 \;.. + b^3 \;.. \end{aligned}$$

ſeyn

Digitized by Google

ſeyn wird. Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind demnach die Cubi der Wurzeln von der fürgegebenen

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

§. 39.

Es ſey z. E. die Gleichung

$$0 = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

deren Wurzeln 1, 2, 4 ſind, ſo iſt

$$a = -\ 7$$
$$b = +\ 14$$
$$c = -\ 8$$

demnach

$$3c - 3ab + a^3 = -\ 73$$
$$3cc - 3abc + b^3 = +\ 584$$
$$c^3 = -\ 512$$

folglich die geſuchte Gleichung

$$0 = z^3 - 73z^2 + 584z - 512$$

deren Wurzeln 1, 8, 64, oder die Cubi von den Wurzeln 1, 2, 4 ſind.

§. 40.

Wenn in der fürgegebenen Gleichung das zweyte Glied $= 0$, oder die Gleichung

$$0 = x^3 + bx + c$$

iſt, ſo iſt auch in der gefundenen Gleichung $a = 0$, und dieſes macht dieſelbe um ein merkliches einfacher, weil ſie ſodann ſchlechthin nur

$$0 = z^3 + 3cz^2 + 3ccz + c^3$$
$$+ b^3z$$

iſt,

iſt, und ſich daher in

$$o = (z + c)^3 + b^3 z$$

verwandelt, welches, weil $z = x^3$ iſt,

$$o = z + c + bx$$

und daher die Gleichung

$$o = x^3 + c + bx,$$

oder $$o = x^3 + bx + c$$

wieder herfürbringt.

§. 41.

Da wir hier

$$z = x^3$$

haben, ſo iſt

$$o = x^3 - z.$$

Dieſe Gleichung hat auſſer der Wurzel

$$o = x - \sqrt[3]{z}$$

noch zwo andere

$$o = x + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{z}.(1 \pm \sqrt{-3})$$

welche folglich ebenfalls Wurzeln der Gleichung

$$o = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma$$

ſind. Da nun dieſe Gleichung durch die Multiplication der beyden Gleichungen

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$
$$o = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

heraus gebracht worden, und die Wurzeln der erſtern dieſer Gleichungen

$$o = x - \sqrt[3]{z}$$

ſind, ſo ſind die Wurzeln der leztern Gleichung nothwendig

o =

$$o = x + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{z}.\,(1 \pm \sqrt{-3}).$$

Wenn demnach entweder die Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

oder die Gleichung

$$o = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

aufgelöſt worden, ſo iſt ebenfalls die Gleichung

$$o = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

oder, wenn wir für die Coefficienten ihre Werthe ſetzen,

$$o = x^6 - ax^5 + aax^4 + 2cx^3 + bbx^4 - cbx + cc$$
$$- bx^4 - abx^3 - acx^4$$

ſo gut als aufgelöſt. Man hat ſich aber darüber nicht zu verwundern: denn die Coefficienten dieſer Gleichung werden ſämtlich durch a, b, c beſtimmt. Daher kann man nur drey, oder wenn man auch $x = v + k$, oder $x = x:k$ ſetzt, nur vier derſelben willkührlich beſtimmen. Die übrigen ſind ſodann durch dieſe zugleich mit beſtimmt.

§. 42.

Wir können hier, ehe wir uns zu der Umkehrung dieſer Aufgabe wenden, theils noch einer andern Methode Erwähnung thun, theils noch folgenden Lehrſatz anführen, welcher aus der bisher gebrauchten Methode fließt, und überhaupt ſo viel ſagen will: wenn eine Gleichung

$$o = x^{mn} + \alpha x^{(m-1)n} + \beta x^{(m-2)n} + \gamma x^{(m-3)n}$$
$$+ \text{etc.}$$

durch

durch die Gleichung

$o = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} +$ ꝛc.

getheilt werden kann, und in erſterer $x^n = z$ geſetzt wird, ſo ſind die Wurzeln der Gleichung

$o = z^m + \alpha z^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma z^{m-3} +$ ꝛc.

die n^{te} Dignität der Gleichung

$o = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} +$ ꝛc.

§. 43.

Die andere Methode, deren wir hier nur Erwähnung thun werden, gründet ſich auf den Newtonſchen Satz, welcher angiebt, wie man, vermittelſt der Coefficienten einer Gleichung, nicht nur die Summe der Wurzeln, ſondern auch die Summe von jeden Dignitäten derſelben finden könne. Dieſe Summen werden durch $\mathrm{ſ}x$, $\mathrm{ſ}x^2$, $\mathrm{ſ}x^3$, $\mathrm{ſ}x^4$ ꝛc. angezeigt, ſo, daß $\mathrm{ſ}x^n$ die Summe der n^{ten} Dignität aller Wurzeln der Gleichung anzeige. Die Gleichung ſey

$o = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - c x^{m-3} +$ ꝛc.

ſo iſt

$$\mathrm{ſ}x = a$$
$$\mathrm{ſ}x^2 = a\,\mathrm{ſ}x - 2b$$
$$\mathrm{ſ}x^3 = a\,\mathrm{ſ}x^2 - b\,\mathrm{ſ}x + 3c$$
$$\mathrm{ſ}x^4 = a\,\mathrm{ſ}x^3 - b\,\mathrm{ſ}x^2 + c\,\mathrm{ſ}x - 4d$$
&c.

Ferners, indem man $z = x^n$ ſetzt, ſey wiederum die Gleichung

$o = z^m - \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} - \gamma z^{m-3} +$ ꝛc.

ſo

ſo iſt ebenfalls

$$ſz = \alpha$$
$$ſz^2 = \alpha ſz - 2\beta$$
$$ſz^3 = \alpha ſz^2 - \beta ſz + 3\gamma$$
$$ſz^4 = \alpha ſz^3 - \beta ſz^2 + \gamma ſz - 4\delta$$
&c.

Da nun vermöge der Vorausſetzung $z = x^n$ iſt, ſo iſt

$$ſz = ſx^n$$
$$ſz^2 = ſx^{2n}$$
$$ſz^3 = ſz^{3n}$$
&c.

Nun ſind vermöge der erſtern Gleichungen $ſx^n$, $ſx^{2n}$, $ſx^{3n}$ &c. durch a, b, c, d &c. gegeben, demnach hat man $ſz$, $ſz^2$, $ſz^3$ &c. und folglich laſſen ſich durch die letztern Gleichungen die Coefficienten α, β, γ, δ &c. und damit die Gleichung

$$0 = z^m - \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} - \&c.$$

finden, deren Wurzeln die n^{te} Dignität von den Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - \&c.$$

ſeyn werden. Man ſieht, ohne mein Erinnern, daß man dieſes Verfahren weiter ausdehnen, und z. E.

$$ſz = ſx^n + A ſx^p + B ſx^q + \&c.$$
$$ſz^2 = ſx^{2n} + A^2 ſx^{2p} + B^2 ſx^{2q} + \&c.$$
&c.

ſetzen kann.

§. 44.

§. 44.

Um nun auf die Umkehrung dieſer Aufgaben zu kommen, ſo werden wir zu dem Beyſpiele des §. 36. zurücke kehren. Wir haben daſelbſt geſehen, daß wenn die Quadratgleichung

$$o = x^2 + ax + b$$

in

$$o = z^2 - 3abz + b^3$$
$$\quad + a^3 z$$

verwandelt wird, ſodann die Wurzeln dieſer letztern Gleichung Cubi von den Wurzeln der erſtern ſind. Es ſey nun eine Quadratgleichung

$$o = z^2 + Az + B$$

gegeben, und dieſe ſolle in eine andere dergeſtalt verwandelt werden, daß dieſer letztern Wurzeln Cubicwurzeln von denen der fürgegebenen Gleichung ſind. Um dieſes zu erhalten, ſo wird die Gleichung

$$o = z^2 + Az + B$$

mit

$$o = z^2 - 3abz + b^3$$
$$\quad + a^3 z$$

verglichen, um die Coefficienten a, b durch A und B zu beſtimmen. Wir haben demnach

$$A = a^3 - 3ab$$
$$B = b^3$$

dieſes giebt

$$b = \sqrt[3]{B}$$

und $$o = a^3 - 3a\sqrt[3]{B} - A.$$

welches

welches eine cubiſche Gleichung iſt, durch deren Auflöſung man a findet. Die geſuchte Gleichung iſt ſodann

$$0 = x^2 + ax + b.$$

Man ſieht leicht, daß ſowohl b als a drey Werthe hat, und daß man daher anſtatt einer Gleichung neune findet, die der Aufgabe Genügen leiſten.

§. 45.

Wir werden uns aber damit nicht aufhalten, ſondern dieſe an ſich ſchon umgekehrte Aufgabe noch auf eine andere Art umkehren. Es kann nemlich die letzte Gleichung

$$0 = a^3 - 3a\sqrt[3]{B} - A$$

mit jeder Cubicgleichung

$$0 = a^3 + pa + q$$

deren zweytes Glied mangelt, verglichen werden. Thut man dieſes, ſo erhält man

$$A = -q$$
$$B = -\tfrac{1}{27}p^3$$

Da nun

$$0 = z^2 + Az + B$$

iſt, ſo darf man nur die gefundenen Werthe von A, B in dieſer Gleichung ſetzen, um

$$0 = z^2 - qz - \tfrac{1}{27}p^3$$

zu erhalten. Dieſe Gleichung aufgelöſt, giebt die zwo Wurzeln

$$z = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}.$$

Nun iſt $z = x^3$

demnach haben wir die zwo Wurzeln

$$x = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3\right)}\right)}$$

Nun iſt vermöge der Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

$-a$ die Summe der beyden Wurzeln x, demnach haben wir

$$-a = \sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3\right)}\right]}$$

welches die bekannte Cardaniſche Formel iſt, die man nach den bisherigen Methoden, die Gleichung

$$0 = a^3 + pa + q$$

aufzulöſen, findet. Man ſieht zugleich, daß die beyden Glieder, aus denen ſie beſteht, Cubicwurzeln von den Wurzeln der Gleichung $0 = z^2 - qz - \tfrac{1}{27}p^3$ ſind.

§. 46.

Um das Beyſpiel des §. 38. ebenfalls noch umzukehren; ſo haben wir daſelbſt geſehen, daß wenn man jede cubiſche Gleichung

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

in

$$\begin{aligned} 0 = z^3 &+ 3cz^2 + 3ccz + c^3 \\ &- 3ab\,.. - 3abc\,... \\ &+ a^3\,.. + b^3\,.. \end{aligned}$$

verwandelt, ſodann die Wurzeln dieſer letztern Gleichung Cubi von den Wurzeln der erſtern ſind. Iſt nun von dieſen Gleichungen die letz-

tere

tere gegeben, ſo, daß man

$$0 = z^3 + Az^2 + Bz + C^3$$

hat, ſo läßt ſich die erſtere finden, und derſelben Wurzeln werden ſodann Cubicwurzeln der Wurzeln der fürgegebenen Gleichung ſeyn. Zu dieſem Ende haben wir

$$A = 3c - 3ab + a^3$$
$$B = 3cc - 3abc + b^3$$
$$C^3 = c^3$$

und hieraus findet ſich für a folgende Gleichung

$$0 = a^9 + 3(3C - A)a^6 + 3(3C - A)^2 . a^3 + (3C - A)^3$$
$$- \quad 27 C . a^6 - (B - AC) . a^3$$

eine Gleichung vom neunten Grade, welche aber in eine cubiſche verwandelt wird, wenn man $a^3 = v$ ſetzt. Iſt a durch die Auflöſung dieſer Gleichung gefunden, ſo hat man

$$b = \frac{3C - A + a^3}{3a}$$

und damit die Gleichung, die zu ſuchen war,

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

welche aber, weil A 9 Werthe, C aber 3 hat, auf 27 Arten verändert werden kann. Man ſieht überhaupt aus dieſen Beyſpielen, daß man auf deſto weitläuftigere Formeln verfällt, je höher die Dignitäten und Gleichungen ſind, die man in einander zu verwandeln vornimmt.

§. 47.

Indeſſen wird es nicht undienlich ſeyn, hier noch anzuzeigen, daß ſich die bisher gebrauchte

demnach die geſuchte Gleichung

$$0 = z^2 - 102z + 1080.$$

Die Probe iſt leicht gemacht. Denn die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^2 - 10x + 16$$

ſind + 2 und + 8. Wird jede derſelben in der Function

$$z = x^2 + 3x + 2$$

geſetzt, ſo erhält man die beyden Werthe $z = 12$ und $z = 90$. Und eben dieſes ſind auch die Wurzeln der für z gefundenen Gleichung

$$0 = z^2 - 102z + 1080.$$

§. 49.

Will man dieſe Aufgabe umkehren, und aus der Gleichung

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

die Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

finden, ſo müſſen a, b durch α, β vermittelſt der Gleichungen

$$\alpha = ma - aa + 2b - 2n$$

$$\beta = bm^2 + bb - mba + n^2 - nma + na^2 - 2nb$$

beſtimmt werden. Man verfällt dadurch auf eine Gleichung vom vierten Grade, welche etwas weitläuftig iſt. Ich werde ſie nicht herſetzen, weil es hier bey der angezeigten Möglichkeit der Aufgabe ſein bewenden haben kann.

§. 50.

Digitized by Google

§. 50.

Es laͤßt ſich aber die Aufgabe noch auf eine andere Art umkehren. Man kann nehmlich die Function

$$z = x^2 + mx + n$$

und in derſelben beſonders die beyden Coefficienten m, n zum Quæſito machen, und da wird der hiebey vorkommende Fall am ſchicklichſten in Form eines Satzes und einer Aufgabe zugleich vorgetragen. Der Satz iſt folgender: **Wenn zwo Quadratgleichungen**

$$0 = x^2 + ax + b$$
$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

gegeben, ſo laͤßt ſich, und zwar ohne die Gleichungen vorerſt aufzuloͤſen, die Wurzel der einen *z* **als eine Function der Wurzel der andern anſehen, welche die rationale Form**

$$z = x^2 + mx + n$$

hat. Die Aufgabe iſt nun: die Coefficienten *m*, *n* zu beſtimmen. Der Beweis und zugleich die Aufloͤſung koͤmmt auf die (§. 47.) gefundene vier Gleichungen

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$nn + n\alpha + \beta = Bb$$

an. Werden aus dieſen die beyden Groͤſſen A, B, die wir nur, um die Aufgabe moͤglich zu machen, gebraucht haben, weggeſchaft, ſo

bleiben noch zwo Gleichungen für m und n, durch deren Auflöſung

$$m = a \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha - 4\beta}{aa - 4b}\right)}$$

$$n = b - \tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2} a \sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha - 4\beta}{aa - 4b}\right)}$$

gefunden, und damit die geſuchte Function

$$z = x^2 + mx + n$$

zugleich beſtimmt wird.

§. 51.

Man ſetze z. E. wie vorhin die zwo Gleichungen

$$0 = x^2 - 10x + 16.$$
$$0 = z^2 - 102x + 1080.$$

ſo iſt

$$a = -10 \qquad \alpha = -102$$
$$b = +16 \qquad \beta = +1080$$

Hieraus erhält man

$$\sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)} = \sqrt{6084} = 78$$
$$\sqrt{(aa - 4b)} = \sqrt{36} = 6$$

demnach $m = -10 \pm 13$

$$n = 16 + 51 \mp 65$$

dieſes giebt

den einen Werth von $m = +3$.
den correſpondirenden von $n = +2$.
den andern Werth von $m = -23$.
den correſpondirenden von $n = +132$.

demnach die beyden Functionen

z =

$z = xx + 3x + 2.$
$z = xx - 23x + 132.$

Setzt man in jeder dieſer Functionen die Werthe von x, welche 2 und 8 ſind, ſo giebt jede die zween Werthe von z, nemlich 12 und 90. Demnach hat man die Wahl, welche von dieſen Functionen man gebrauchen will. Solte man aber nur eine Wurzel von x wiſſen oder haben, oder dieſelbe lieber gebrauchen wollen, ſo muß man ſie in jeder von dieſen zwo Functionen ſetzen, um die beyden Werthe von z zu erhalten.

§. 52.

Endlich kann die Aufgabe, wiewohl auf eine unbeſtimmtere Art, noch dergeſtalt umgekehrt werden, daß, wenn nur die Function

$$z = xx + mx + n$$

gegeben, zwo Gleichungen

$$0 = xx + ax + b$$
$$0 = zz + \alpha z + \beta$$

zu finden ſeyn, deren die erſte x, die andere z beſonders enthalte. Dieſe Aufgabe iſt an ſich unbeſtimmt, und dient daher fürnemlich nur, wenn in der fürgegebenen Function z und x als veränderlich angeſehen werden. Denn hier ſind die vier Coefficienten a, b, α, β vermittelſt der vier Gleichungen

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$n^2 + n\alpha + \beta = Bb.$$

zu ſuchen; demnach müſſen A, B, als willkührliche Gröſſen beybehalten werden, und man findet

$a = 2m - A$

$b = B - mA + mm$

$\alpha = AA + mA + 2B - 2n$

$\beta = BB - mAB + m^2B + n^2 - mnA$
$- 2nB + nAA.$

Da nun nur m und n gegeben ſind, ſo können A, B willkührlich angenommen werden, und die Gleichungen

$$0 = xx + ax + b$$
$$0 = zz + \alpha z + \beta$$

werden immer der Function

$$z = xx + mx + n$$

ein Genügen thun; das will ſagen, man wird aus der erſten dieſer Gleichungen zwo Wurzeln x finden, welche den aus der zweyten gefundenen Wurzeln z entſprechen, und dieſes geht nicht nur durch alle mögliche, ſondern auch durch alle unmögliche Werthe von x und z.

§. 53.

Was bisher (§. 47. ſeqq.) von den Verhältniſſen der beyden Quadratgleichungen

$$0 = x^2 + ax + b$$
$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

und der Function

$$z = x^2 + mx + n$$

geſagt worden, iſt in Abſicht auf die dabey gebrauchte

gebrauchte Methode viel allgemeiner, weil es ſich auf jede Gleichungen und rationale Functionen erſtreckt. Alles dabey zielet überhaupt dahin, daß man mit den Wurzeln der Gleichungen, ohne dieſe vorerſt aufzulöſen, jede Veränderungen vornehmen könne. Und in dieſem Stücke iſt man in der Algebra noch zurücke geblieben, wie man es ſchon aus den bisher angeführten Beyſpielen erſehen kann, welche ungleich weiter gehen, als wenn man nur $x+a$, $x-a$, ax, $x:a$ anſtatt der Wurzel x ſetzt. Indeſſen hat man beſonders mit den trigonometriſchen Formeln Verwandlungen vorgenommen, welche denen, die wir hier für jede Gleichungen vorſchlagen, ſehr ähnlich ſind, und an ſich betrachtet, ſchwerer zu ſeyn ſcheinen, weil die Circulbögen, in Abſicht auf die Sinus und Tangenten, tranſcendente Gröſſen ſind.

§. 54.

Um aber dennoch auch, in Abſicht auf jede Gleichungen, hierin den Weg gebähnt zu machen, ſo werden wir bey folgender Aufgabe anfangen. Es ſeyn zwo Gleichungen

$$0 = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \text{ꝛc.}$$
$$0 = y^n - \alpha x^{n-1} + \beta y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \text{ꝛc.}$$

gegeben, und es ſolle, ohne dieſe vorerſt aufzulöſen, eine dritte Gleichung

$$0 = z^\lambda - A z^{\lambda-1} + B z^{\lambda-2} - C z^{\lambda-3} + \text{ꝛc.}$$

daraus hergeleitet werden, ſo, daß jede

Wur-

Wurzel z die Summe zwoer Wurzeln $x + y$ ſey.

§. 55.

Ehe wir die Aufloͤſung dieſer Aufgabe herſetzen, werden wir einige Anmerkungen daruͤber voraus ſchicken. Einmal ſieht man leicht, daß, wenn auch die Analyſis ſo weit gebracht waͤre, daß man die beyden erſten Gleichungen aufloͤſen koͤnnte, die dritte dennoch nicht wohl anders als durch eine weitlaͤuftige Rechnung daraus wuͤrde hergeleitet werden, beſonders in allen den Faͤllen, wo die Wurzeln irrational waͤren. Denn da wuͤrden nachgehends, wie wir bald ſehen werden, dieſe irrationalen Groͤſſen ſaͤmtlich wieder aus der Rechnung wegfallen, weil, wenn die Coefficienten a, b, c, d ꝛc. α, β, γ, δ ꝛc. rational ſind, die Coefficienten A, B, C, D ꝛc. es nothwendig auch ſind.

§. 56.

Sodann tragen wir hier die Aufgabe aufs allgemeinſte vor. Wir nehmen in der dritten Gleichung ſo viele Wurzeln z an, als heraus kommen muͤſſen, wenn jede Wurzel x zu jeder Wurzel y beſonders addirt wird. Wenn demnach die Anzahl der Wurzeln der erſten Gleichung $= m$, der andern $= n$ iſt, ſo iſt die Anzahl der Wurzeln, ſo die dritte Gleichung haben wird $= mn$, und dieſes beſtimmt den Exponenten $\lambda = mn$. Dieſe Anzahl kann

kann alsdann vermindert werden, wenn in der erſten oder andern Gleichung, oder auch in beyden, etliche Wurzeln gleich ſind. Man muß dieſes aber voraus wiſſen, oder aus den Umſtänden ſchlieſſen können. Wir ſetzen hier alle Wurzeln ungleich, und um eine Einförmigkeit in der Rechnung beyzubehalten, alle poſitiv, weil, wenn in beſondern Fällen einige, oder alle negativ ſind, die Aenderung der Zeichen ſich darnach einrichten läßt.

§. 57.

Dieſe ſo abſolute Allgemeinheit trägt viel dazu bey, daß wir die Auflöſung der Aufgabe einfacher machen, und auf ihre allgemeinſte Geſetze bringen können. Und dazu werden uns die oben (§. 43.) angeführten Formeln von der Summe der Dignitäten der Wurzeln jeder Gleichung dienen können. Denn da hier die Coefficienten der beyden erſten Gleichungen gegeben ſind, ſo ſind, vermittelſt dieſer Formeln, auch die Summen von jeden Dignitäten ihrer Wurzeln gegeben. Es iſt demnach nur die Frage, wie aus dieſen Summen die Summen jeder Dignitäten der Wurzeln der dritten Gleichung gefunden werden können; das will ſagen, wie ſich aus $\int x^n$ und $\int y^n$ die Summe $\int (x+y)^n = \int z^n$ herleiten laſſe. Denn ſind dieſe gefunden, ſo dienen die vorbemeldeten Formeln (§. 43.) ebenfalls wiederum, um die geſuchten Coefficienten A, B, C &c. daraus zu beſtimmen.

§. 58.

Man ſetze zu dieſem Ende, P, Q, R &c. ſeyn die Wurzeln der erſten Gleichung; p, q, r &c. die Wurzeln der zweyten; ſo werden

$$\begin{matrix} P+p & Q+p & R+p & \&c. \\ P+q & Q+q & R+q & \\ P+r & Q+r & R+r & \\ \&c. & \&c. & \&c. & \end{matrix}$$

die Wurzeln der dritten ſeyn. Nun findet ſich jede Dignität k dieſer Wurzeln, vermittelſt des Newtonſchen Binomialſatzes. Es iſt nemlich

$$(P+p)^k = P^k + k.P^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.P^{k-2}p^2 + \&c.\ldots + p^k$$

$$(Q+p)^k = Q^k + k.Q^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.Q^{k-2}p^2 + \&c.\ldots + p^k$$

$$(R+p)^k = R^k + k.R^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.R^{k-2}p^2 + \&c.\ldots + p^k$$

&c.

Da man eben ſo viele Reihen für q, r, s &c. findet, als für p; ſo erhellt überhaupt hieraus folgendes:

1°. Wenn alle dieſe Dignitäten zuſammen addirt werden, ſo erhält man ſo viele

P^k, Q^k, R^k &c.

als Wurzeln p, q, r &c. ſind. Da nun die Anzahl dieſer Wurzeln $= n$ iſt, ſo iſt die Summe von allen

$= n(P^k + Q^k + R^k + \&c.) = n ſx^k.$

2°. Auf gleiche Art erhält man ſo viele p^k, q^k, r^k &c. als Wurzeln P, Q, R &c. ſind. Demnach iſt die Summe von allen
$= m(p^k + q^k + r^k + \&c.) = m ſy^k.$

3°. Dieſes ſind demnach die Summen der erſten und letzten Glieder aller Reihen. Die Summen der darauf folgenden erſten, zweyten, dritten ... w^{ten} Glieder, laſſen ſich auf eine allgemeine Formel bringen. Denn da ſie einerley Coefficienten haben, ſo ſind die w^{ten} Glieder, mit Weglaſſung des Coefficienten,

$$P^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$$
$$Q^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$$
$$R^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$$
&c.

daher ihre Summe

$$= ſx^{k-w} . ſy^w.$$

4°. Wird demnach in dieſer Formel, der Ordnung nach, für w, 1, 2, 3, 4 ꝛc. geſetzt, ſo erhält man

$$ſ(x+y)^k = ſz^k = n ſx^k + k ſx^{k-1} . ſy + \frac{k . k-1}{2} . ſx^{k-2} ſy^2 + \frac{k . k-1}{2} . \frac{k-2}{3} . ſx^{k-3} . ſy^3 + \&c.$$

welches die geſuchte Formel iſt.

§. 59.

§. 59.

Dieſe Formel ſcheint in dem erſten und letzten Gliede einen beſondern Coefficienten zu haben. Es läßt ſich aber derſelbe auch dadurch herleiten, daß
$$n = ſy^0$$
$$m = ſx^0$$
iſt. Denn $ſy^0$ will ſagen, ſo viele Einheiten als die zweyte Gleichung Wurzeln hat, und $ſx^0$ ſo viele Einheiten, als Wurzeln der erſten Gleichung ſind. Und damit bringen dieſe beyde Coefficienten keine Anomalie in die Formel. Dieſe Formel iſt übrigens der Newtonſchen in allem ähnlich, und unterſcheidet ſich nur darin, daß, anſtatt daß in der Newtonſchen, um eine Dignität heraus zu bringen, nur Dignitäten mit einander multiplicirt werden, in dieſer ganzen Summen von Dignitäten mit einander multiplicirt werden muſſen, und dadurch aber auch eine Summe von Dignitäten heraus gebracht wird, deren jede ein Binomium iſt.

§. 60.

Setzen wir nun in dieſer Formel für k der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. und bemerken dabey, daß wo ein Exponent von $x, = 0$ wird, man $ſx^0 = m$ ſetzen müſſe, ſo haben wir

$$ſz = nſx + mſy$$
$$ſz^2 = nſx^2 + 2ſx.\,ſy + mſy^2$$
$$ſz^3 = nſx^3 + 3ſx^2.ſy + 3ſx.ſy^2 + mſy^3$$
$$ſz^4 = nſx^4 + 4ſx^3.ſy + 6ſx^2.ſy^2 + 4ſxſy^3 + mſy^4 \text{ \&c.}$$

§. 61.

Digitized by Google

§. 61.

Um nun dieſes Verfahren durch das einfachſte Beyſpiel zu erläutern, ſo ſeyn zwo Quadratgleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

gegeben, und es ſolle eine Gleichung gefunden werden, deren Wurzeln $z = x + y$ ſind. Dieſe Gleichung iſt nun (§. 56.)

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

weil die Summe der Exponenten $n + m = 2 + 2 = 4 = \lambda$ iſt. Nun iſt vermöge der Formel des §. 43.

$\int x = a$	$\int y = \alpha$
$\int x^2 = a^2 - 2b$	$\int y^2 = \alpha^2 - 2\beta$
$\int x^3 = a^3 - 3ab$	$\int y^3 = \alpha^3 - 3\beta\alpha$
$\int x^4 = a^4 - 4a^2b + 2bb$	$\int y^4 = \alpha^4 - 4\beta\alpha^2 + 2\beta\beta$

folglich

$$\int z = 2(a + \alpha)$$
$$\int z^2 = 2a^2 - 4b + 2\alpha^2 - 4\beta + 2a\alpha$$
$$\int z^3 = 2a^3 - 6ab + 2\alpha^3 - 6\alpha\beta + 3\alpha a^2 - 6\alpha b + 3a\alpha^2 - 6a\beta$$
$$\int z^4 = 2a^4 - 8ab + 4bb + 2\alpha^4 - 8\alpha^2\beta + 4\beta\beta + 4a^3\alpha - 12ab\alpha + 4\alpha^3 a - 12\alpha\beta a + 6a^2\alpha^2 - 12a^2\beta - 12\alpha^2 b + 24b\beta$$

Da nun (§. 43.)

$$A = \int z$$
$$2B = A\int z - \int z^2$$
$$3C = \int z^3 - A\int z^2 + B\int z$$
$$4D = A\int z^3 - B\int z^2 + C\int z - \int z^4$$

iſt, ſo findet ſich, wenn man die Werthe von $\int z$, $\int z^2$, $\int z^3$, $\int z^4$ in dieſen Formeln ſetzt, und die Reduction vornimmt

$$A = 2(a + \alpha)$$
$$B = (a + \alpha)^2 + (a\alpha + 2b + 2\beta)$$
$$C = (a\alpha + 2b + 2\beta).(a + \alpha)$$
$$D = (a\beta + \alpha b).(a + \alpha) + (\beta - b)^2$$

und damit iſt die geſuchte Gleichung

$$o = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

beſtimmt, und gefunden, deren Wurzeln z die Summe $x + y$ der Wurzeln der Gleichungen

$$o = x^2 - ax + b$$
$$o = y^2 - \alpha x + \beta$$

ſind.

§. 62.

Will man anſtatt $z = x + y$, die Differenz $z = x - y$ haben, ſo darf man nur in der zweyten Gleichung α negativ nehmen, weil dieſes die Wurzeln y verneinend macht.

§. 63.

Solle aber

$$z = \pi x + \varrho y$$

ſeyn; ſo müſſen beyde Gleichungen vorerſt in ſolche verwandelt werden, deren Wurzeln

$\xi =$

$\xi = \pi x$, und $\eta = \varrho y$ ſind. Man wird demnach

$$0 = \xi^2 - a\pi\xi + b\pi^2$$
$$0 = \eta^2 - \alpha\varrho\eta + \beta\varrho^2$$

haben, und in den vier Gleichungen, wodurch A, B, C, D beſtimmt worden, $a\pi$ anſtatt a, und $\alpha\varrho$ anſtatt α ſetzen müſſen, um die geſuchte Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

heraus zu bringen.

§. 64.

Solle aber

$$z = \pi x^2 + \varrho y^3 + \tau$$

ſeyn, ſo müſſen einige Verwandlungen mehr vorgehen. Man macht nemlich nach den oben gegebenen Methoden aus

$$0 = x^2 - ax + b$$

eine Gleichung

$$0 = \xi^2 + 2b\xi + bb \\ - aa\xi$$

deren Wurzeln $\xi = xx$, oder Quadrate von x ſind. Sodann ſetzt man $\pi xx = \pi\xi = \zeta$, um dadurch

$$0 = \zeta^2 + 2\pi b\zeta + bb\pi\pi \\ - aa\pi\zeta$$

zu erhalten. Endlich ſetzt man $\zeta + \tau = v$, und ſo erhält man

$$0 = v^2 - 2\tau v + \tau\tau$$
$$+ 2\pi b v - 2\pi b \tau$$
$$- aa\pi v + aa\pi\tau$$
$$+ bb\pi\pi$$

Ferners verwandelt man die zweyte Gleichung

$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

nach der oben angegebenen Methode (§. 36.) in

$$0 = \eta^2 - 3\alpha\beta\eta + \beta^3$$
$$+ \alpha^3\eta$$

deren Wurzeln $\eta = y^3$, oder Cubi von y ſind. Sodann ſetzt man $\varrho\eta = \varrho y^3 = \sigma$, und erhält dadurch

$$0 = \sigma^2 - 3\alpha\beta\varrho\sigma + \beta^3\varrho^2$$
$$+ \alpha^3\varrho\sigma$$

Da man auf dieſe Art endlich $z = v + \sigma$ hat, ſo darf man nur in den 4 Gleichungen, wodurch A, B, C, D beſtimmt werden (§. 60.)

$-2\tau + 2\pi b - aa\pi$ anſtatt a
$\tau\tau - 2\pi b\tau + aa\pi\tau + b^2\pi^2$ anſtatt b

und

$-3\alpha\beta\varrho + \alpha^3\varrho$ anſtatt α
$\beta^3\varrho^2$ anſtatt β

ſetzen, um dadurch die Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

zu beſtimmen, deren Wurzeln ſodann

$$z = v + \sigma = \zeta + \tau + \sigma = \pi\xi + \tau + \varrho\eta = \pi x^2 + \tau + \varrho y^3$$

folglich

$$z = \pi x^2 + \varrho y^3 + \tau$$

ſeyn werden.

§. 65.

§. 65.

Man kann auf eine ähnliche Art

$$z = Mx^k + Nx^h + \&c.$$
$$+ Px^k + Qy^\lambda + \&c.$$
$$+ R$$

ſetzen, und die Gleichung

$$o = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

aus den beyden Gleichungen

$$o = x^2 - ax + b$$
$$o = y^2 - \alpha y + \beta$$

ohne dieſe vorerſt aufzulöſen, heraus bringen. Denn dieſe beyden Gleichungen laſſen ſich nach der Regel des §. 47 in zwo andere

$$o = \xi^2 - \grave{a}\xi + b'$$
$$o = \eta^2 - \grave{\alpha}\eta + \beta'$$

dergeſtalt verwandeln, daß

$$\xi = Mx^k + Nx^h + \&c. + R$$

und

$$\eta = Py^k + Qy^\lambda + \&c.$$

ſey, und ſo hat man ſodann

$$z = \xi + \eta.$$

wodurch ſich die Coefficienten in der geſuchten Gleichung

$$o = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

beſtimmen laſſen.

§. 66.

Wir werden nun aber ſehen, wie die Rechnung ausfällt, wenn z nicht die Summe $x + y$,

ſondern das Product xy iſt. Es ſey demnach wiederum, wie §. 54.

$$0 = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \text{etc.}$$

$$0 = y^n - \alpha y^{n-1} + \beta y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \text{etc.}$$

ſo iſt (§. 54. 56.)

$$0 = z^{mn} - A z^{mn-1} + B z^{mn-2} - C z^{mn-3} + \text{etc.}$$

Es ſeyn ebenfalls, wie (§. 58.) P, Q, R &c. die Wurzeln der erſten Gleichung, p, q, r &c. die Wurzeln der andern; ſo ſind, weil $z = xy$ ſeyn ſolle, die Wurzeln der dritten

Pp	Qp	Rp &c.
Pq	Qq	Rq
Pr	Qr	Rr
&c.	&c.	&c.

Da dieſes nun keine Binomia ſind, ſo gebrauchen wir den Newtonſchen Lehrſatz nicht, ſondern es iſt überhaupt

$$\int z^k = + P^k p^k + Q^k p^k + R^k p^k \text{ \&c.}$$
$$+ P^k q^k + Q^k q^k + R^k q^k$$
$$+ P^k r^k + Q^k r^k + R^k r^k$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

das will ſagen,

$$\int z^k = \int y^k (P^k + Q^k + R^k + \text{\&c.}) = \int y^k . \int x^k$$

folglich, wenn man der Ordnung nach $k = 1, 2, 3, 4$ etc. ſetzt,

$$\int z = \int x . \int y$$
$$\int z^2 = \int x^2 . \int y^2$$
$$\int z^3 = \int x^3 . \int y^3$$
$$\text{\&c.}$$

und

und hieraus vermöge der Formeln des §. 43.

$+ \quad A = ſx\,ſy$

$-2B = ſx^2 . ſy^2 - A\,ſx . ſy$

$+3C = ſx^3 . ſy^3 - A\,ſx^2 . ſy^2 + B\,ſx . ſy$

$-4D = ſx^4 . ſy^4 - A . ſx^3 . ſy^3 + B\,ſx^2 . ſy^2$
$\qquad - C\,ſx . ſy.$

&c.

Da nun $ſx$, $ſx^2$, $ſx^3$ &c. $ſy$, $ſy^2$, $ſy^3$ &c. durch a, b, c &c. α, β, γ &c. gegeben ſind, (§. 43.) ſo hat man vermittelſt dieſer Formeln auch A, B, C, D &c. und damit die geſuchte Gleichung

$$0 = z^{mn} - A\,z^{mn-1} + B\,z^{mn-2} - \text{\&c.}$$

deren Wurzeln $z = xy$ ſeyn werden. Man ſieht zugleich aus dieſem Beweiſe, daß

A durch a, α
B durch a, α, b, β
C durch a, α, b, β, c, γ
&c.

beſtimmt wird, ſo viel auch die fürgegebenen beyden Gleichungen Glieder und Coefficienten haben mögen.

§. 67.

Ungeachtet übrigens die Beweiſe, ſo wir ſowohl für $z = x + y$, als für $z = xy$ gegeben haben, bey ihrer Allgemeinheit noch ſehr einfach ſind, ſo verfällt man dennoch in weitläuftige Rechnungen, wenn man ſie in beſondern Fällen entwickeln, und die Coefficienten A, B, C, D &c. nicht durch $ſx$, $ſx^2$ &c. $ſy$, $ſy^2$ &c.

 ſon-

ſondern durch a, b, c &c. α, β, γ &c. ausdrücken will, dafern dieſe nicht in Zahlen gegeben ſind. Ich habe daher eine andere Methode geſucht, wodurch dieſe Weitläuftigkeit in beſondern Fällen abgekürzt werden kann. Es ſeyn z. E. zwo Quadratgleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

gegeben, und eine dritte Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

zu finden, ſo, daß $z = xy$ ſey. Man ſetze

$$x = z : y$$

in die erſte Gleichung

$$0 = x^2 - ax + b$$

ſo verwandelt ſich dieſe in

$$0 = z^2 - azy + by^2.$$

Nun giebt die zweyte Gleichung mit b multiplicirt

$$0 = by^2 - \alpha by + \beta b$$

wird dieſe abgezogen, ſo bleibt

$$0 = z^2 - b\beta + (\alpha b - az)y$$

demnach

$$y = (b\beta - z^2) : (\alpha b - az)$$

Dieſer Werth von y in der Gleichung

$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

geſetzt, und die Reduction vorgenommen, giebt die geſuchte Gleichung

$$0 = z^4 - a\alpha z^3 + a^2\beta z^2 - a\alpha b\beta z + b^2\beta^2$$
$$+ \alpha^2 b \,..$$
$$- 2b\beta \,..$$

deren Wurzeln $z = xy$ ſind.

§. 68.

§. 68.

Solte aber z nicht das Product xy, ſondern der Quotient $x:y$, oder ein Product aus $x^m y^n$ ſeyn, ſo gelangt man beſſer zum Ziele, wenn man vorerſt die beyden Gleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

in zwo andern Quadratgleichungen verwandelt, deren Wurzeln

$$\xi = x^m$$
$$\eta = y^n$$

ſind, welches nach den oben angegebenen Methoden geſchieht. Denn ſo erhält man

$$z = \xi\eta$$
$$0 = \xi^2 - G\xi + H$$
$$0 = \eta^2 - K\eta + L$$

und folglich die geſuchte Gleichung

$$0 = z^4 - GKz^3 + G^2Lz^2 - GHKLz + H^2L^2$$
$$+ K^2Hz^2$$
$$- 2HLz^2$$

welche immer eine Biquadratgleichung ſeyn wird, ſo groß auch die Exponenten m, n ſeyn mögen.

Digitized by Google

IX.
Quadratur und Rectification der krummen Linien durch geradlinichte Vielecke, welche um dieſelben und in denſelben beſchrieben werden können.

§. 1.

Tab. III. Archimedes iſt der erſte geweſen, welcher ſich, da die Quadratur und Rectification des Circuls nicht genau gefunden noch durch Zahlen ausgedrucket werden konnte, in Sinn kommen lieſſe, dieſe beyden Gröſſen, vermittelſt der um den Circul und in denſelben beſchriebenen Vielecke dergeſtalt zu beſtimmen, daß er die Schranken angeben könnte, zwiſchen welchen ſie fiele. Die durchaus gleichförmige Krümmung des Circuls machte, daß man die ſogenannten regulären Vielecke dazu gebrauchen konnte, bey welchen ſich von einer Seite auf den ganzen Umkreis ſchlieſſen lieſſe; und einige geometriſche Lehrſätze verhalfen dazu, daß man durch fortgeſetztes Halbiren aus jedem angenommenen Vielecke andere von 2, 4, 8, 16, 32 ꝛc. mal mehr Seiten berechnen konnte.

Digitized by Google

§. 2.

Dieſe Schicklichkeiten fallen bey jeden andern krummen Linien gröſtentheils weg. Es laſſen ſich zwar um und in denſelben geradlinichte Vielecke beſchreiben, dabey aber werden, wenn man die Seiten gleich macht, die Winkel ungleich, und hinwiederum erhält man bey gleichen Winkeln ungleiche Seiten; dieſes macht, daß ſich nicht ſo unbedingt von jeder Seite auf den ganzen Umkreis des Vieleckes ſchlieſſen läßt. Ueberdies läßt ſich auch nicht ſo leicht beſtimmen, wie wenn das Vieleck um die Linie gezogen oder angenommen worden, daß demſelben entſprechende Vieleck in derſelben müſſe gezogen werden, weil ſich, wenn man nicht zwo oder mehr Bedingungen zugleich annimmt, unzählige ziehen laſſen, die ſämtlich einander unähnlich ſind. Hingegen iſt bey dem Circul die Anzahl der Seiten, und die Bedingung, daß ſie einander gleich ſeyn ſollen völlig zureichend.

§. 3.

Da demnach bey der Ziehung der Vielecke um jede andere krumme Linien, die nicht Circul ſind, viel willkührliches bleibt, ſo werden wir bey dem anfangen, was für ſich am einfachſten, und beſonders in der Ausübung am leichteſten iſt. Und hier bieten ſich ſogleich zween Fälle an. Denn hat man nach beliebigen Regeln ein Vieleck in eine krumme Linie beſchrie-

beſchrieben, ſo iſt unter allen Vielecken, die von gleichvielen Seiten um daſſelbe beſchrieben werden können, dasjenige das gleichförmigſte und regulärſte, deſſen Seiten mit den Seiten des inner der krumnien Linie gezogenen Parallel ſind. Die Regularität wird gröſſer und zu den vorhabenden Abſichten bequemer, wenn man die Winkel gleich macht, welche jede zwo Seiten des Vieleckes mit einander machen.

§. 4.

Fig. I. So z. E. ſey AMNB eine halbe Ellipſe. Solte in und um dieſelbe ein Sechseck beſchrieben werden, ſo macht man den Winkel MAB = 60 Gr. und zieht AM. Sodann wird AMN = MNB = 120 Gr. gemacht, und MN, NB gezogen, ſo iſt AMNB die Hälfte des Sechseckes in der Ellipſe. Ferner zieht man die Tangente am, mn, nb mit AM, MN, NB parallel, und ſo iſt amnb die Hälfte des Sechseckes um die Ellipſe. Dieſe Art die Vielecke in und um eine krumme Linie zu zeichnen, hat in Abſicht auf die Ausübung etwas ſehr leichtes und einfaches, weil ſich dabey die Durchſchnittspuncten M, N, B, m, n, b von ſelbſt ergeben, und weil es ſehr leicht iſt, Tangenten an eine krumme Linie zu ziehen, welche mit der Chorde derſelben parallel ſeyn.

§. 5.

Es verſchwindet aber dieſe Leichtigkeit gröſtentheils, wenn man bey dem äuſſern Vielecke

ecke anfångt, und ſodann das Innere nach demſelben ziehen will, weil ſich die Puncte A, M, N, B nicht eben ſo leicht durch die Puncten a, m, n, b beſtimmen laſſen. Mit der Bedingung, daß die innern Seiten den åuſſern parallel ſeyn ſollen, reicht man nicht aus, weil ſich unter dieſer Bedingung unzählige Vielecke ziehen laſſen, in dem man z. E. den Punct M auf dem ganzen Bogen $\mu\,\nu$, der zwiſchen den Berührungspuncten μ, ν liegt, annehmen kann, wo man will. Geht man aber von der Bedingung der parallelen Lage beyder Vielecke ab, ſo iſt der einfachſte und kenntlichſte Fall derjenige, wo, nachdem das åuſſere Vieleck gezogen worden, das Innere in die Berührungspuncten μ, ν, ϵ falle. Auf dieſe Art ſtellt $\alpha\,\mu\,\nu\,\epsilon\,\gamma$ die Hälfte des Sechseckes vor. Die Beſtimmung der Berührungspuncte iſt es nun, was hiebey die meiſte Schwürigkeit verurſacht. Hingegen hat dieſe letztere Art der Verzeichnung beyder Vielecke den Vortheil, daß ſich dabey einzelne Stücke der krummen Linie, dergleichen $\mu\,M\,\nu$ iſt, beſonders betrachten, und mit dem Triangel $\mu\,m\,\nu$ vergleichen laſſen. Ueberdies iſt der Winkel $E\,m\,a$ das Maaß der Krümmung des Bogens $\mu\,M\,\nu$, weil derſelben in μ die Richtung $\mu\,m$, in ν die Richtung $\nu\,m$ hat. Werden aus μ, ν parallele Ordinaten $\mu\,\alpha$, $\nu\,C$ auf $A\,B$ gezogen, ſo findet ſich

$$E\,m\,\mu = m\,\nu\,C - a\,\mu\,\alpha.$$

Denn

Denn es iſt

$$Em\mu = m\mu\nu + m\nu\mu$$
$$180^\circ = \alpha\mu\nu + m\nu C$$

demnach

$$Em\mu + 180 = \alpha\mu m + m\nu C$$
$$Em\mu = \alpha\mu m - 180 + m\nu C = m\nu C - \alpha\mu\alpha$$

Da nun die Winkel $a\mu\alpha$, $m\nu C$ durch die Differentialien der Abſciſſen und Ordinaten leicht beſtimmt werden, ſo läßt ſich auch die krumme Linie leicht in ſolche Theile theilen, die einerley Krümmung haben, oder wobey die Poligonalwinkel $\mu m\nu$ ſämtlich gleich werden.

§. 6.

Um nun zu ſehen, was hieraus zum Behuf der Rectification der krummen Linien kann gefunden werden, ſo werden wir einen Triangel, dergleichen $\mu m\nu$ iſt, beſonders vornehmen, und denſelben auf das allgemeinſte betrachten. Fig. II. Es ſey demnach AM ein Stück einer krummen Linie, AT die Tangente des Puncts A, und TM die Tangente des Puncts M, AM die Chorde. Man verlängere AT in P und fälle auf AP die Linie MP ſenkrecht, ſo, daß AP als eine Abſciſſe, PM als eine Ordinate angeſehen werde, und TP die dem Punct M zugehörige Subtangente ſey. Man ſetze

$$AP = x$$
$$PM = y$$

ſo iſt

die

Digitized by Google

die Chorde $AM = \surd(xx + yy)$

$PT = ydx:dy$

$AT = x - ydx:dy$

und der Bogen $AM = \int\surd(dx^2 + dy^2)$

die Tangente $TM = y\surd\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)$

§. 7.

Werden in dieſen Formeln die Wurzelgröſſen nach der Newtonſchen Binomialformel aufgelöſt, ſo iſt

$$TM = y\left(\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{2dx} - \frac{dy^3}{2.4dx^3} + \frac{1.3.dy^5}{2.4.6dx^5} - \text{ꝛc.}\right)$$

demnach

$$AT + TM = x + \frac{ydy}{2dx} - \frac{y.dy^3}{2.4.dx^3} + \frac{3y.dy^5}{2.4.6.dx^5} - \text{ꝛc.}$$

ferner die Chorde

$$AM = x + \frac{y^2}{2x} - \frac{y^4}{2.4.x^3} + \frac{1.3.y^6}{2.4.6.x^5} - \text{ꝛc.}$$

und der Bogen

$$AM = x + \tfrac{1}{2}\int\frac{dy^2}{dx} - \frac{1}{2.4}\int\frac{dy^4}{dx^3} + \frac{1.3}{2.4.6}\int\frac{dy^6}{dx^5} - \text{ꝛc.}$$

Da nun hiebey

$$dy:dx = \text{tang.}\,MTP$$

iſt, ſo ſind alle dieſe Reihen deſtomehr convergirend, je kleiner die Krümmung des Bogens AM iſt.

§. 8.

Nun läßt ſich die Verhältniß zwiſchen y und x überhaupt durch die Reihe

y =

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + ex^6 + \text{rc.}$$

ausdrücken. Ich ſage überhaupt und ohne Rückſicht auf gewiſſe Puncte einiger krummen Linien, wo ſtatt ganzer Exponenten gebrochene zum Vorſchein kommen, oder wo einige der erſten Glieder dieſer Reihe $= 0$ werden. Man ſetze A wäre ein ſolcher Punct, ſo darf man nur anſtatt aus der Tangente A P die Abſciſſenlinie zu machen, die Abciſſen auf M T nehmen, und man wird die Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \&c.$$

immer ganz erhalten. In dieſer Reihe bleiben nemlich die beyden erſten Glieder, welche ſonſt

$$A + Bx$$

ſeyn würden, weg, weil y zugleich mit $x = 0$ wird, und weil B x nur vorkömmt, wo die Abſciſſenlinie die krumme Linie unter einem Winkel ſchneidet, deren Tangente $= B$ iſt.

§. 9.

Wenn wir demnach die Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

als die allgemeinſte Gleichung zwiſchen y und x annehmen, ſo iſt

$$dy = dx(2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + 5dx^4 + \text{rc.})$$

Werden nun dieſe Werthe in den erſt gefundenen Reihen (§. 7.) geſetzt, und die für den Bogen AM angezeigten Integrationen vorgenommen,

men, ſo erhält man den Bogen $AM = x +$

$$\tfrac{2}{3}a^2x^3 + \tfrac{3}{2}abx^4 + \tfrac{8}{5}acx^5 + \tfrac{5}{3}adx^6 + \tfrac{12}{7}aex^7 + \text{ꝛc.}$$
$$+ \tfrac{9}{10}bb \ldots + 2bc \ldots + \tfrac{15}{7}bd \ldots$$
$$- \tfrac{2}{5}a^4 \ldots - 2a^3b \ldots + \tfrac{8}{7}cc \ldots$$
$$- \tfrac{18}{7}a^3c \ldots$$
$$- \tfrac{27}{7}a^2b^2 \ldots$$
$$+ \tfrac{4}{7}a^6 \ldots$$

die Chorde $AM = x +$

$$\tfrac{1}{2}a^2x^3 + abx^4 + acx^5 + adx^6 + aex^7 + \text{ꝛc.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}bb \ldots + bc \ldots + bd \ldots$$
$$- \tfrac{1}{8}a^4 \ldots - \tfrac{1}{2}a^3b \ldots + \tfrac{1}{2}cc \ldots$$
$$- \tfrac{1}{2}a^3c \ldots$$
$$- \tfrac{3}{4}b^2a^2 \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{16}a^6 \ldots$$

Ferners die Summe der Tangenten $AT + TM =$

$$x + a^2x^3 + \tfrac{5}{2}abx^4 + 3acx^5 + \tfrac{7}{2}adx^6 + 4aex^7$$
$$- a^4 \ldots - \tfrac{11}{2}a^3b \ldots - 7a^3c \ldots$$
$$+ \tfrac{3}{2}b^2 \ldots + \tfrac{7}{2}bc \ldots - \tfrac{45}{4}a^2b^2 \ldots$$
$$+ 4bd \ldots$$
$$+ 2cc \ldots$$
$$+ 2a^6 \ldots$$

§. 10.

Vergleicht man nun dieſe drey Reihen mit einander, ſo finden ſich die Coefficienten a, b, c, d &c. in allen auf einerley Art verwickelt, und der Unterſchied beſteht nur in den Zahlen, womit ſie in jeder Reihe beſonders multiplicirt ſind. Dieſe Zahlen finden ſich nun aber ſo beſchaffen, daß, wenn man $\tfrac{1}{3}(AT + TM)$ zu $\tfrac{2}{3}$ von

$\frac{2}{3}$ von der Chorde addirt, man eine Reihe

$$\frac{AT + TM + 2AM}{3} = x + \tfrac{2}{3}a^2x^3 + \tfrac{3}{2}abx^4 + \tfrac{5}{3}acx^5 + \tfrac{11}{6}adx^6 + 2aex^7 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{llll} & + \tfrac{5}{6}bb\ldots & + \tfrac{11}{6}bc\ldots & + 2bd\ldots \\ & - \tfrac{5}{12}a^4\ldots & - \tfrac{13}{6}a^3b\ldots & + cc\ldots \\ & & & - \tfrac{8}{3}a^3c\ldots \\ & & & - \tfrac{17}{4}a^2b^2\ldots \\ & & & + \tfrac{17}{24}a^6\ldots \end{array}$$

erhält, deren drey erſten Glieder mit der für den Bogen AM gefundenen Reihe übereintreffen, und welche folglich nur um $\frac{AT + TM + 2AM}{3}$ —

$$AmM = + \tfrac{1}{15}acx^5 + \tfrac{1}{6}adx^6 + \tfrac{2}{7}aex^7 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{lll} - \tfrac{1}{15}bb\ldots & - \tfrac{1}{6}bc\ldots & - \tfrac{1}{7}bd\ldots \\ - \tfrac{1}{60}a^4\ldots & - \tfrac{1}{6}a^3b\ldots & - \tfrac{1}{7}cc\ldots \\ & & - \tfrac{2}{21}a^3c\ldots \\ & & - \tfrac{11}{28}b^2a^2\ldots \\ & & - \tfrac{23}{168}a^6\ldots \end{array}$$

gröſſer iſt, als der Bogen. Da dieſer Unterſchied erſt bey der fünften Dignität der Abſciſſe x anfängt, ſo wird derſelbe bey jeden Halbiren der Abciſſe, oder auch des Bogens, 32 mal kleiner. Man kann alſo hieraus beurtheilen, was man ſich von dieſer Art, die Länge einer krummen Linie durch Näherung zu beſtimmen, zu verſprechen hat, oder von wie wenigen Graden der Krümmung man den Bogen AmM annehmen müſſe, wenn der Fehler, den man zuläßt, wenn man für deſſen Länge

$$\frac{AT + TM + 2AM}{3}$$

an-

annimmt, eine gewiſſe Gröſſe nicht überſchreiten ſollen.

§. 11.

Wir wollen um dieſes auf eine leichte Art verſtändlicher zu machen, den Halbmeſſer des Krümmungskreiſes zur Einheit annehmen, und die Fehler beſtimmen, die man zuläßt, wenn man auf dieſe Art die Länge eines Bogens des Krümmungskreiſes ſucht. Es ſey demnach AM ein Circulbogen, deſſen Halbmeſſer = 1 iſt; ſo iſt AM deſſen Chorde, AT = TM die Tangente der Hälfte des Bogens. Man ſetze nun den Bogen ſtuffenweiſe 5, 10, 15 Gr. ſo wird man für

$$5\text{ Gr. } \frac{AT + TM + 2AM}{3} = 0{,}0872665$$

10	= 0,1745334
15	= 0,2618033
20	= 0,3490823
ꝛc.	

erhalten, da hingegen die Länge des Bogens ſelbſt für

5°	= 0,0872665
10	= 0,1745329
15	= 0,2617994
20	= 0,3490659
ꝛc.	

iſt. Zieht man dieſe Zahlen von den erſten ab, ſo bleibt für

5 Gr.	$=0,0000000$
10	$=0,0000005$
15	$=0,0000039$
20	$=0,0000165$

ꝛc.

Woraus man ſieht, daß, wenn man einen Fehler, der ſich auf $\frac{1}{60000}$ des Halbmeſſers für einen Bogen von 20 Graden beläuft, nicht achten will, man auf dieſe Art Bögen von 20 Graden Krümmung rectificiren kann. Nimmt man aber lauter Bögen von 5 Graden, ſo iſt der Fehler nicht ſo groß, daß er auf 10 Millionen 1 betrüge. Da nun die gemeinen Tafeln der Sinus, Tangenten, Secanten ebenfalls nur bis auf 10000000te Theile berechnet ſind, und man ſich faſt bey allen Rechnungen damit begnügt, ſo erhellet hieraus, daß man ſich aus gleichen Gründen begnügen kann, bey der Rectification jeder krummen Linie, dieſelbe in ſolche Stücke zu theilen, deren Krümmung 5 Gr. beträgt, und daß man ſodann für die Länge jedes Bogens A m A ſchlechthin nur

$$\frac{AT + TM + 2AM}{3}$$

nehmen darf. Der Fehler wird immer kleiner als $\frac{1}{10000000}$ Theil des Halbmeſſers des Krümmungskreiſes ſeyn.

§. 12.

Will man ſich aber ſtatt der Berechnung der Conſtruction bedienen, ſo wird die Figur ſelten

ſelten ſo groß gezeichnet, daß $\frac{1}{10000}$ des Halbmeſſers des Krümmungskreiſes merklich wäre, daher kann man kürzer verfahren, und mit einem male die Länge ſolcher Stücke der krummen Linien finden, deren Krümmung ſich bis auf 20 Gr. beläuft. Wir haben nun noch zu ſehen, was ſowohl bey der Berechnung als bey der Conſtruction zu thun iſt.

§. 13.

Es ſey demnach AMN jede krumme Linie. Fig. III. Auf AP werden die Abſciſſen AP, AQ, und die ſenkrechten Ordinaten PM, QN genommen. TMR, VRN ſeyn die Tangenten in M und N; R derſelben Durchſchnittspunct, und MN die Chorde, ſo iſt der zwiſchen M und N liegende Bogen um deſto genauer

$$= \frac{MR + RN + 2MN}{3}$$

je kleiner die Krümmung deſſelben iſt, ſo, daß bey jeder doppelt kleinern Krümmung der Fehler bey 32 mal geringer wird (§. 10.).

§. 14.

Man ſetze nun

$AP = x \quad AQ = \xi \quad MTP = \omega$

$PM = y \quad QN = \eta \quad NVQ = \varphi$

ſo wird

$$\text{tang.}\,\omega = dy : dx$$
$$\text{tang.}\,\varphi = d\eta : d\xi$$

und folglich

$$\text{tang. } VRT = \text{tang. } (\omega - \varphi) = \frac{dy.d\xi - d\eta.dx}{dx.d\xi + dy.d\eta}$$

ſeyn. Hiedurch wird, weil VRT die Krümmung des Bogens iſt, dieſelbe beſtimmt, und man kann in Abſicht auf die zu erhaltende Genauigkeit nach §. 11. erörtern, ob man den fürgegebenen Bogen MN, deſſen Länge zu finden, ganz beybehalten könne, oder denſelben in Theile zerfällen müſſe, indem man zwiſchen PQ noch eine oder mehrere Abſciſſen annimmt. Da im letztern Fall für jeden Theil einerley Rechnung vorzunehmen iſt, wie für den ganzen Bogen, ſo können wir AM als einen ſolchen Theil angeben, und die Rechnung, wodurch die Chorde MN, nebſt den Tangenten MR, RN, oder überhaupt die Seiten des Triangels MRN beſtimmt werden, wird folgendermaſſen gefunden.

§. 15.

Man ziehe NH, MK mit der Abſciſſenlinie AQ und KRL mit den Ordinaten parallel, ſo iſt

$$MH = ML + KN = \xi - x$$
$$LH = LR + RK = \eta - y$$

Nun iſt

$$ML = MR\,\text{coſ.}\,\omega \qquad LR = MR\,\text{ſin.}\,\omega$$
$$KN = NR\,\text{coſ.}\,\varphi \qquad RK = NR\,\text{ſin.}\,\varphi$$

demnach

$$MR\,\text{coſ.}\,\omega + NR\,\text{coſ.}\,\varphi = \xi - x$$
$$MR\,\text{ſin.}\,\omega + NR\,\text{ſin.}\,\varphi = \eta - y.$$

Wer-

Digitized by Google

Werden dieſe Gleichungen aufgelöſt, ſo findet ſich

$$MR = \frac{(\eta - y)\,\text{coſ.}\,\varphi - (\xi - x)\,\text{ſin.}\,\varphi}{\text{ſin.}\,(\omega - \varphi)}$$

$$NR = \frac{-(\eta - y)\,\text{coſ.}\,\omega + (\xi - x)\,\text{ſin.}\,\omega}{\text{ſin.}\,(\omega - \varphi)}$$

Da nun die Chorde

$$MN = \sqrt{((\xi - x)^2 + (\eta - \eta)^2)}$$

iſt, ſo laſſen ſich vermittelſt dieſer dreyen Formeln die drey Seiten MR, RN, NM des Triangels MRN und daher die durch Näherung geſuchte Länge des Bogens, welche

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3}$$

ſeyn wird, leicht finden.

§. 16.

Man kann auch, wenn man ſich der trigonometriſchen Tabellen bedienen will,

$$dy : dx = \text{tang.}\,\omega$$
$$d\eta : d\xi = \text{tang.}\,\varphi$$
$$(\eta - y) : (\xi - x) = \text{tang.}\,\psi$$

machen, und nachdem man auf dieſe Art die Winkel ω, φ, ψ, welche TMP, VNQ, NMH ſind, gefunden, und die Chorde

$$MN = \sqrt{((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2)}$$

berechnet iſt, ſo wird man

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3} = \frac{\text{ſ}(\psi - \varphi) + \text{ſ}(\omega - \psi) + 2\,\text{ſ}(\omega - \varphi)}{3\,\text{ſ}(\omega - \varphi)} \cdot MN$$

für die durch Näherung geſuchte Länge des Bogens erhalten.

§. 17.

Dieſe Formel fleußt aus den erſten Sätzen der Trigonometrie, weil

$$\psi - \varphi = RNM$$
$$\omega - \psi = RMN$$
$$\omega - \varphi = MRV$$

und die Seiten RM, RN, MN in Verhältniß der Sinus dieſer Winkel ſind. Uebrigens läßt ſich dieſe Formel in ſofern noch zuſammenziehen, als

$$\text{ſ}(\psi - \varphi) + \text{ſ}(\omega - \psi) = 2\,\text{ſ}\,\frac{\omega - \varphi}{2} \cdot \text{coſ}\,\frac{2\psi - \omega - \varphi}{2}$$

und

$$\text{ſin.}(\omega - \varphi) = 2\,\text{ſ}\,\frac{\omega - \varphi}{2} \cdot \text{coſ}\,\frac{\omega - \varphi}{2}$$

iſt. Denn werden dieſe Werthe ſubſtituirt, ſo erhält man

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3} = \text{coſ}\left(\frac{2\psi - \omega - \varphi}{2}\right) MN : 3\,\text{coſ}\,\frac{\omega - \varphi}{2} + \frac{2MN}{3}.$$

§. 18.

Um dieſes Verfahren durch ein leichtes Beyſpiel zu erläutern, ſo ſey AMN eine Parabel, und

$$2x = yy$$

demnach

$$2dx = 2ydy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} = \text{tang.}\,\omega$$

und

und daher auch

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\eta} = \text{tang.}\,\varphi.$$

Man ſetze z. E. P ſey der Brennpunct, folglich $y = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $\omega = 45$ Gr. und die Krümmung des Bogens NM werde von 5 Gr. angenommen, ſo iſt $\varphi = 45^\circ - 5^\circ = 40^\circ$. demnach $1 : \eta = \text{tang. } 40$ Gr.

$$\eta = 1,1917536$$
$$\log. \eta = 0,0761865$$
$$2 \log. \eta = 0,1523730$$
$$\log. 2 = 0,3010300$$
$$\log. \xi = 0,8513430 - 1$$

$$\xi = 0,7101384 \qquad \eta = 1,1917536$$
$$x = 0,5000000 \qquad y = 1,0000000$$
$$\xi - x = 0,2101384 \qquad \eta - y = 0,1917536$$

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = 0,9125205 = \text{tang.}\,\psi$$
$$\psi = 42^\circ.22'.52''$$
$$\frac{\omega + \varphi}{2} = 42.30.0$$
$$\frac{\omega + \varphi}{2} - \psi = 0.\ 7.\ 8 \quad \log.\text{coſ.} = 0,9999991 - 1$$
$$\frac{\omega - \varphi}{2} = 2.30.\ 0 \quad \log.\text{coſ.} = 0,9995865 - 1$$
$$\text{diff.} \quad 0,0004126$$

Ferner $NM = 0,2844777$ $\log. MN = 0,4540483 - 1$

$$\log.(MR + RN) = 0,4544609 - 1$$

$$MR+RN=0,2847481$$

$$\tfrac{1}{3}(MR+RN)=0,0949160$$
$$\tfrac{2}{3}\ MN=0,1896518$$
$$0,2845678$$

Und dieſes iſt demnach bis auf einen $\frac{1}{10000000}$ Theil des halben Parameters der Parabel die Länge des Bogens MN, welche zu ſuchen war.

§. 19.

Nimmt man aber den Bogen gröſſer an, z. E. von 15 Grad Krümmung, ſo, daß $\omega=45°$, $\varphi=30$ Grad ſey, ſo findet man

$$x=\tfrac{1}{2} \qquad \xi=\tfrac{3}{2}$$
$$y=1 \qquad \eta=\sqrt{3}$$

demnach

$$\xi-x=1$$
$$\eta-y=\sqrt{3}-1 \quad \text{daher } NM=1,2393137$$
$$\text{tang.}\,\psi=\sqrt{3}-1=0,7320508$$
$$\psi=36°.12'.22''$$
$$\tfrac{1}{2}(\omega-\varphi)=37.30.0$$

$$\tfrac{1}{2}(\omega+\varphi)-\psi=1.17.38 \quad \log.\cos.=0,9998892-1$$
$$\tfrac{1}{2}(\omega-\varphi)=7.30.0 \quad \log.\cos.=0,9962686-1$$
$$\text{diff.}=0,0036206$$
$$\log.NM=0,0931812$$
$$\log.(RM+RN)=0,0968018$$
$$RM+RN=1,2496888$$

$$\tfrac{1}{3}(RM+RN)=0,4165629$$
$$\tfrac{2}{3}\ MN=0,8262091$$
$$1,2427720.$$

Die

Dieſes wåre demnach die durch dieſe Nåherung gefundene Långe des Bogens. Es iſt aber die wahre Långe

$$= 1,2427361$$

demnach der Unterſchied $0,0000359$

welcher ſich kaum auf $\frac{1}{35000}$ Theil des Bogens belåuft.

§. 20.

Wenn man ſich ſtatt der Rechnung mit der Conſtruction begnůgen will, ſo kann man mehrentheils noch grőſſere Bőgen vornehmen, weil man bey den Conſtructionen ſelten ſo ſcharf verfåhrt, daß man auf 35000 nicht um 1 fehlen ſolte. Ueberdies wird die Arbeit kůrzer, weil die Seiten der Triangel MRN ehender gemeſſen als berechnet ſind. Hingegen kann die Ziehung der Tangenten MR, RN, oder der Chorden MN Schwůrigkeiten und Weitlåuftigkeiten haben. Denn ungeachtet ſich dieſe Linien, jede fůr ſich betrachtet, leicht ziehen laſſen, ſo kőmmt hier die Bedingung vor, daß, wenn die Tangenten gezogen ſind, die Chorden in die Berůhrungspuncte gezogen werden; oder hinwiederum, daß, wenn die Chorden gezogen ſind, die Tangenten an die Endpuncten der Chorden gezogen werden. Hiebey kőmmt es auf beſondere Vortheile an, die man aus der Natur der vorhabenden krummen Linie vorerſt finden muß, ſo wie man dergleichen fůr die paraboliſchen, logarithmiſchen und andere Linien gefunden.

§. 21.

§. 21.

Es kommen aber beſonders in der angewandten Mathematik Fälle vor, wo die krumme Linie ſchlechthin durch Verſuche beſtimmt wird, und wo die Gleichung dazu noch nicht bekannt iſt, Und da iſt die Frage: wie, wenn man an ſolche Linien Tangenten gezogen, der Berührungspunct gefunden werden könne? Dieſe Frage läßt ſich für alle diejenigen Berührungspuncten, wo entweder die krumme Linie einen Diameter hat, oder wo wenigſtens der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes weder o noch ∞ iſt, folgendermaſſen auflöſen: Es
Fig. III. ſey AMB ein Stück einer krummen Linie, und an dieſelbe ſey die Tangente TM gezogen. Um den Berührungspunct M zu finden, ziehe man mit der Tangente parallele Chorden AB, ſo viel man will, und ſo nahe beyſammen, als man will. Jede Chorde theile man in zween gleiche Theile, und ſo wird ſich durch die Theilungspuncte C, eine Linie MC ziehen laſſen, welche in den Berührungspunct M trift. Dieſe Linie iſt gerade und ein Diameter, wenn AMN ein Kegelſchnitt iſt. In andern Fällen kann ſie ebenfals gerade ſeyn, wenn nemlich die krumme Linie einen oder mehrere Diameter hat, und einer derſelben in den Punct M trift. In allen übrigen Fällen iſt CM eine krumme Linie, und zwar iſt ihre Krümmung deſto geringer, je weniger ſich die Linie AMB von der Krümmung eines Kegelſchnittes entfernt. Da nun

Digitized by Google

nun bey denen krummen Linien, wo dieſe Bedingung wegfallen kann, ſie nur bey einzelnen Puncten, wie z. E. bey den Wendungspuncten wegfällt, ſo kann dieſe Methode überhaupt betrachtet ſo gut als allgemein angeſehen werden. Daß aber der Gebrauch davon viel allgemeiner ſey läßt ſich leicht erachten. Man ſetze z. E. AB ſey eine Abſciſſenlinie, ſo habe die Ordinate in M ein Maximum. Die gröſte Ordinate findet ſich durch Ziehung der mit AB parallelen Tangente ohne Mühe. Will man aber die Ordinate ſelbſt ziehen, ſo muß vorerſt der Punct M gefunden werden. Und dazu dient die erſt angegebene Methode, immer vorausgeſetzt, daß die Gleichung, wodurch die Natur der Linie AMB ausgedruckt wird, nicht bekannt ſey.

§. 22.

Um nun zu ſehen, wiefern die bisher angeführten Betrachtungen ebenfalls zur Quadratur der krummen Linien dienen können, wenn dieſe vermittelſt der Vielecke durch Näherung geſucht wird, ſo werden wir zur 2ten Figur zurücke kehren, und da beut ſich die Anmerkung von ſelbſt an, daß wenn der Bogen AmM ein Stücke einer krummen Linie iſt, ſodann ATM ein Stück des um dieſelbe beſchriebenen Vieleckes ſey, ſo wie die Chorde AM eine Seite des in derſelben beſchriebenen Vieleckes iſt. Der Unterſchied des Flächenraumes ergiebt ſich theils aus dem Abſchnitte AMm, und um Fig. II.

ſo

ſo viel iſt die krumme Linie gröſſer als das zu der Seite AM gehörende Theil des in der krummen Linie beſchriebenen Vieleckes; theils aus dem Raume AmMT, um welchen die Linie kleiner iſt als der zu den Seiten ATM gehörende Theil des um die krumme Linie beſchriebenen Vieleckes.

§. 23.

Wir wollen damit anfangen, daß wir den Raum AmMP ſuchen, und hiezu werden wir die vorhin gebrauchte Benennung anwenden. (§. 6. ſeqq.) Es iſt demnach

$$AmMP = \int y\,dx = \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{4}bx^4 + \tfrac{1}{5}cx^5 + \tfrac{1}{6}dx^6 + \text{etc.}$$

hingegen iſt der Raum des

$$\triangle AMP = \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^4 + \tfrac{1}{2}cx^5 + \tfrac{1}{2}dx^6 + \text{etc.}$$

Nimmt man demnach $\frac{2}{3}$ von dieſem Triangel, ſo iſt

$$\tfrac{2}{3}\triangle AMP = \tfrac{1}{3}xy = \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{3}bx^4 + \tfrac{1}{3}cx^5 + \tfrac{1}{3}dx^6 + \text{etc.}$$

hievon der Raum AmMP abgezogen, bleibt

$$\tfrac{2}{3}\triangle AMP - AmMP = \tfrac{1}{12}bx^4 + \tfrac{2}{15}cx^5 + \tfrac{1}{6}dx^6 + \text{etc.}$$

Sofern man nun dieſen Unterſchied für nichts achten kann, läßt ſich der Raum AmMP als $\frac{2}{3}$ von dem Raum des Triangels AMP anſehen, und eben ſo wird der Raum AmMQ $= \frac{2}{3}$ APMQ ſeyn. Denn AMmA = AMP

$AMP - AmMP = \frac{1}{3} AMP = \frac{1}{6} APMQ$, und folglich $AMmQ = (\frac{1}{6} + \frac{1}{2}) APMQ = \frac{2}{3} APMQ$.

§. 24.

Alles dieſes hat nach geometriſcher Schärfe ſtatt, wenn der Bogen A m M ein Stück einer Parabel iſt. Demnach kömmt es in jedem andern Fall der Wahrheit um deſto näher, je weniger die Krümmung des Bogens A m M von der Krümmung eines denſelben oſculirenden paraboliſchen Bogens abweicht.

§. 25.

Wir können aber ferners das Segment AMmA, mit dem Triangel AMT vergleichen, deſſen Inhalt $= \frac{1}{2}. AT. PM$ iſt. Werden demnach die Werthe

$$AT = \tfrac{1}{2}x + \frac{bxx}{4a} + cx^3 + \tfrac{3}{4}d.x^4 + \&c.$$
$$\qquad\qquad - \frac{3bb}{8aa} \ldots - \frac{5bc}{4aa} \ldots$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{9b^3}{8a^3} \ldots$$

$$PM = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

mit einander multiplicirt, ſo findet ſich die Hälfte des Productes $\triangle AMT =$

$$\tfrac{1}{4}ax^3 + \tfrac{3}{4}bx^4 + \tfrac{1}{2}cx^5 + \tfrac{5}{8}dx^6 + \&c.$$
$$\qquad\qquad - \frac{bb}{16a} \ldots - \frac{bc}{4a} \ldots$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{3b^3}{8a^2} \ldots$$

Hinge-

Hingegen iſt das Segment $AmMA = \triangle AMP - AmMP$, ſolglich $AmMA =$
$\frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{4}bx^4 + \frac{3}{10}cx^5 + \frac{1}{3}dx^6 + \&c.$
Wird demnach wiederum $\frac{2}{3}$ von dem Triangel AMT genommen und das Segment $AmMA$ davon abgezogen, ſo bleibt $\frac{2}{3}AMT -$
$AmMA = \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{30}cx^5 + \frac{1}{12}dx^6 +$ rc.

$$- \frac{bb}{24a} \ldots - \frac{bc}{6a} \ldots$$

$$+ \frac{b^3}{4a^2} \ldots$$

Dieſer Unterſchied wird ebenfals $= 0$, ſo ofte AmM ein Stück einer Parabel iſt. Demnach iſt derſelbe in jedem andern Fall deſto unmerklicher, je weniger AmM von der Krümmung des oſculirenden paraboliſchen Bogens abweicht. Man kann daher, ſo oft die Krümmung des Bogens von wenigen Graden iſt, für das Segment $AmMA$, $\frac{2}{3}$ des $\triangle AMT$ nehmen.

§. 26.

Will man aber das Segment $AmMA$ mit beyden Triangeln AMT und AMP vergleichen, ſo darf man nur $\frac{1}{4}AMP + \frac{1}{6}AMT$ zuſammen addiren, und das Segment wird nur um

$$+ \frac{11}{120}cx^5 + \frac{5}{48}dx^6 + \&c.$$

$$+ \frac{b}{24a} \ldots$$

$$- \frac{b^3}{16a^2} \ldots$$

gröſ-

groͤſſer ſeyn. Da dieſer Unterſchied, welcher bey jedem paraboliſchen Bogen ebenfalls = 0 wird, ſich erſt bey der fuͤnften Dignitaͤt der Abſciſſe x aͤuſſert, ſo ſieht man leicht, daß man auf dieſe Art der Wahrheit ſehr viel naͤher koͤmmt, und der Bogen bey gleichem Fehler merklich groͤſſer ſeyn kann.

§. 27.

Es ſey z. E. A m M ein Circulbogen = ω, deſſen Halbmeſſer = 1, ſo iſt A P = ſin. ω, M p = 1 — coſ. ω, A T = T M = tang. $\frac{1}{2}\omega$, demnach

$$\tfrac{1}{4}\triangle AMP = \tfrac{1}{8}(1 - \text{coſ.}\,\omega)\,\text{ſ}\omega = \tfrac{1}{8}\,\text{ſ}\omega - \tfrac{1}{16}\,\text{ſ}2\omega$$

$$\tfrac{1}{6}\triangle AMT = \tfrac{1}{12}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega\,(1 - \text{coſ.}\,\omega) = \tfrac{1}{6}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{12}\,\text{ſin.}\,\omega$$

und

$$\tfrac{1}{4}\triangle AMP + \tfrac{1}{6}\triangle AMT = \tfrac{1}{6}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{24}\,\text{ſin.}\,\omega - \tfrac{1}{16}\,\text{ſ}2\omega.$$

Dieſes giebt fuͤr einen Bogen von 20 Graden den Werth . . . 0,0034645.
Es iſt aber der wahre Inhalt des Segmentes . . . 0,0035228

diff. 0,0000583.

Der Unterſchied iſt $\frac{1}{60}$ Theil des Segmentes, oder $\frac{1}{35000}$ Theil des Quadrats des Halbmeſſers, oder der Einheit, welche bey dieſer Ausmeſſung zum Grunde liegt. Waͤre der Bogen nur von 10 Gr. ſo wuͤrde man nach dieſer Formel 0, 0004405 anſtatt 0, 0004423 finden,

finden, und daher der Unterſchied nur 0,0000018 ſeyn.

§. 28.

Indeſſen, wenn es nur um das Segment AmMn zu thun iſt, ſo kann man es bey der erſten Methode (§. 23.) bewenden laſſen, wenn man nemlich die Chorde AM mit der Höhe nm multiplicirt und von dem Producte $\frac{2}{3}$ nimmt. Man ſetze z. E. wiederum AmM ſey ein Circulbogen von ω Graden, ſo iſt die Chorde $AM = 2 \sin. \frac{1}{2}\omega$, und die Sagitte $nm = 1 - \cos. \frac{1}{2}\omega$, daher

$$\tfrac{2}{3}.AM.nm = \tfrac{4}{3}(\sin. \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\sin. \omega)$$

dies giebt für den Bogen von 20 Graden 0,0035175 anſtatt des wahren Inhaltes 0,0035228, der Unterſchied iſt nun hier nur 0,0000053, bey 11 mal kleiner als vorhin, welches daher rührt, weil hier anſtatt des Segmentes AmMQ das Segment AmMnA quadrirt worden.

§. 29.

Fig. V. Es ſey, um nun zu allgemeinern Betrachtungen fortzuſchreiten, AμmM ein Stück einer beliebigen krummen Linie, AP eine Tangente, A deren Berührungspunct, AN, MP auf AP ſenkrecht, MN parallel, und man habe das Segment AMN zu quadriren. Um dieſes auch bey ſolchen krummen Linien, für welche man die Gleichung nicht weiß, und die folglich

folglich aus Verſuchen conſtruirt, oder auch von freyer Hand gezogen ſind, ſo genau man es gebraucht oder verlangt, oder auch ſo genau es die Gröſſe der Figur zuläßt, zu erhalten, kann man die Linie in m, μ in beliebige kleinere Theile theilen, und in dem man A μ, μ m, m M durch gerade Linie zuſammen zieht, das dadurch entſtehende Vieleck N A μ m M beſonders, und nach den erſt angegebenen Methoden die kleinen Segmente A μ, μ m, m M jedes beſonders quadriren, und die Summe wird dem Wahren deſto näher kommen, in je mehr Theile man den Bogen A M getheilt hat. Es iſt dabey eben nicht nothwendig, daß die Theile einander genau gleich ſeyn, jedoch iſt es gut, wenn ſie nicht gar zu ungleich ſind, weil die gröſſern Segmente nach den erſt angegebenen Methoden minder genau quadrirt werden als die kleinern.

§. 30.

Wir wollen aber das Willkührliche, welches bey dieſer Eintheilung bleibt, ſo einſchränken, daß wir die Aſciſſe A P in beliebiger Anzahl gleicher Theile theilen, und aus den Theilungspuncten, dergleichen π, p ſind, Ordinaten $\pi\mu$, p m aufrichten, und durch Ziehung der Parallelen $\mu\nu$, m n, die Rectangel A $\nu\mu\pi$, A n m p vollenden. Nun kann der Inhalt dieſer Rectangel, ſowohl durch Rechnung als durch Conſtruction, immer leicht gefunden werden. Die Frage iſt demnach, ob ſich aus

Digitized by Google

denſelben der Inhalt des Segmentes AMN, oder auch der Segmente Amn, $A\mu\nu$ eben ſo leicht, und um deſto genauer finden laſſe, in je mehr gleiche Theile AP getheilt worden? Und zwar, welches wohl zu merken, ohne daß man weiter nichts als den Inhalt der Rectangel $A\mu$, Am, AM &c. wiſſe.

§. 31.

Die Bedingung, die wir zur Auflöſung dieſer Frage, annehmen, iſt, daß die Abſciſſen auf der Tangente AP, und zwar von dem Berührungspunct A an gerechnet, genommen werden. Sodann, da wir die Anzahl der Theile willkührlich und daher unbeſtimmt laſſen, ſo werden wir $A\pi$ den erſten, πp den zweyten, pP den dritten Theil nennen, und auf dieſe Art fortfahren, um ſodann die Wahl zu behalten, bey welchem wir ſtehen bleiben wollen.

§. 32.

Es ſey demnach

$A\pi = x$	$\pi\mu = y'$	$A\pi\mu\nu = R'$	$A\mu\nu = S'$
$Ap = 2x$	$pm = y''$	$Apmn = R''$	$Amn = S''$
$AP = 3x$	$PM = y'''$	$APMN = R'''$	$AMN = S'''$
&c.	&c.	&c.	&c.

Und die Verhältniß zwiſchen x, y, werden wie vorhin (§. 8.) und aus eben den Gründen, durch die Reihe

$$y' = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

ausgedrückt; ſo wird man

$y'' =$

$y'' = 4ax^2 + 8bx^3 + 16cx^4 + 32dx^5 +$ ꝛc.
$y''' = 9ax^2 + 27bx^3 + 81cx^4 + 243dx^5 +$ ꝛc.
$y^{IV} = 16ax^2 + 64bx^3 + 256cx^4 + 1024dx^5 +$ ꝛc.
&c.
$R' = ax^3 + bx^4 + cx^5 + dx^6 +$ ꝛc.
$R'' = 8ax^3 + 16bx^4 + 32cx^5 + 64dx^6 +$ ꝛc.
$R''' = 27ax^3 + 81bx^4 + 243cx^5 + 729dx^6 +$ ꝛc.
$R^{IV} = 64ax^3 + 256bx^4 + 1024cx^5 + 4096dx^6 +$ ꝛc.
&c.
und

$S' = \frac{2}{3}ax^3 + \frac{3}{4}bx^4 + \frac{4}{5}cx^5 + \frac{5}{6}dx^6 +$ ꝛc.

$S'' = \frac{2 \cdot 8}{3}ax^3 + \frac{3 \cdot 16}{4}bx^4 + \frac{4 \cdot 32}{5}cx^5 + \frac{5 \cdot 64}{6}dx^6 +$ ꝛc.

$S''' = \frac{2 \cdot 27}{3}ax^3 + \frac{3 \cdot 81}{4}bx^4 + \frac{4 \cdot 243}{5}cx^5 + \frac{5 \cdot 729}{6}dx^6 +$ ꝛc.

$S^{IV} = \frac{2 \cdot 64}{3}ax^3 + \frac{3 \cdot 256}{4}bx^4 + \frac{4 \cdot 1024}{5}cx^5 + \frac{5 \cdot 4096}{6}dx^6 +$ ꝛc.

&c.

erhalten. Um nun hiebey die Brüche zu vermeiden, und nicht jedes Segment beſonders mit den Rectangeln zu vergleichen, werden wir überhaupt

$S = \alpha ax^3 + \beta bx^4 + \gamma cx^5 + \delta dx^6 +$ ꝛc.

ſetzen, weil die Werthe von α, β, γ, δ &c. nachgehends ohne Mühe für die Segmente S', S'', S''' ꝛc. können geſetzt werden.

§. 33.

Da nun die Reihen, ſo wir für jede Rectangel und Segmente gefunden, nur in den Zahlen, womit ihre Glieder multiplicirt werden,

von einander verſchieden ſind, ſo läßt ſich für jedes Segment eine Reihe von Zahlen m, n, p, q, r &c. gedenken, ſo, daß

$$S = mR' + nR'' + pR''' + qR^{IV} + \text{etc.}$$

werde. Da nun hiebey x nicht veränderlich seyn könnte, dafern dieſe Vergleichung nicht auch bey jedem Gliede ſtatt hätte, ſo erhalten wir dadurch

$$\alpha = m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{etc.}$$
$$\beta = m + 16n + 81p + 256q + 625r + \text{etc.}$$
$$\gamma = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{etc.}$$
$$\delta = m + 64n + 729p + 4096q + 15625r + \text{etc.}$$
$$\varepsilon = m + 128n + 2187p + 16384q + 78125r + \text{etc.}$$

§. 34.

Da dieſe Gleichungen in allwegen ins Unendliche fortgehen, ſo kömmt es nun darauf an, wie viele Glieder man beybehalten will, oder auch in wie viele Theile die Abſciſſe AP getheilt wird. So viele Glieder man beybehält, ſo viele Gleichungen werden auch beybehalten, um m, n, p &c. dadurch zu beſtimmen. Da aber alle Coefficienten geometriſche Progreſſionen ſind, ſo findet ſich in der Auflöſung etwas einförmiges, welches macht, daß die verſchiedenen Werthe, ſo m, n, p, q &c. erhalten, wenn man 1, 2, 3 ꝛc. von dieſen Buchſtaben beybehält, nach gewiſſen Geſetzen können aus einander hergeleitet werden. So z. E. um die verſchiedene Werthe des m zu finden, ſchaft man

man aus dieſen Gleichungen, der Ordnung nach, n, p, q &c. weg. Nun wird erſtlich n weggeſchaft, wenn jede Gleichung verdoppelt von der nächſtfolgenden abgezogen wird. Denn ſo bleibt

$$\beta - 2\alpha = -m + 27p + 128q + 375r + \text{etc.}$$
$$\gamma - 2\beta = -m + 81p + 512q + 1875r + \text{etc.}$$
$$\delta - 2\gamma = -m + 243p + 2048q + 9375r + \text{etc.}$$
$$\varepsilon - 2\delta = -m + 729p + 8192q + 46875r + \text{etc.}$$
&c.

Hier ſind die Coefficienten ebenfalls geometriſche Progreſſionen. Daher wird p weggeſchaft, wenn jede Gleichung dreyfach genommen, von der nächſtfolgenden abgezogen wird; ſo bleibt

$$\gamma - 5\beta + 6\alpha = 2m + 128q + 750r + \text{etc.}$$
$$\delta - 5\gamma + 6\beta = 2m + 512q + 3750r + \text{etc.}$$
$$\varepsilon - 5\delta + 6\gamma = 2m + 2048q + 18750r + \text{etc.}$$
&c.

Um eben ſo q wegzuſchaffen, wird jede Gleichung vierfach genommen von der nächſtfolgenden abgezogen; demnach bleibt

$$\delta - 9\gamma + 26\beta - 24\alpha = -6m + 750r + \text{etc.}$$
$$\varepsilon - 9\delta + 26\gamma - 24\beta = -6m + 3750r + \text{etc.}$$
&c.

Aus dieſen Gleichungen wird r weggeſchaft, wenn jede fünffach genommen von der nächſtfolgenden abgezogen wird. Und ſo bleibt

$$\varepsilon - 14\delta + 71\gamma - 154\beta - 120\alpha = 24m + \text{etc.}$$

Auf dieſe Art erhält man, der Ordnung nach, die Werthe

$$m = \alpha$$
$$m = 2\alpha - \beta$$
$$2m = 6\alpha - 5\beta + \gamma$$
$$6m = 24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta$$
$$24m = 120\alpha - 154\beta + 71\gamma - 14\delta + \varepsilon$$
&c.

Und man ſieht aus der Art wie die Buchſtaben m, p, q, r &c. weggeſchaft worden, daß in dieſen Werthen von m die Coefficienten durch die Multiplication der Factoren

$$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1) \text{ ꝛc.}$$

erzeugt werden.

§. 35.

Aus denen in vorhergehenden §. gefundenen Ueberreſten, laſſen ſich nun ferner die Werthe von jedem der übrigen Buchſtaben finden. Denn man darf nur anſtatt denſelben wegzuſchaffen, m wegſchaffen. So z. E. wenn man die Werthe von q finden will, ſo zieht man die Gleichungen

$$\gamma - 5\beta + 6\alpha = 2m + 128q + 750r + \text{ꝛc.}$$
$$\delta - 5\gamma + 6\beta = 2m + 512q + 3750r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon - 5\gamma + 6\delta = 2m + 2048q + 18750r + \text{ꝛc.}$$
&c.

jede von der nächſtfolgenden ab, und ſo bleibt

$$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 384q + 3000r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon - 6\delta + 11\gamma - 6\beta = 1536q + 15000r + \text{ꝛc.}$$
&c.

Hier wird nun, um q beyzubehalten, r weggeſchaft, indem man jede Gleichung fünffach genom-

ad

— 14

— 13

— 12 δ

— 11 δ

— 10 δ

men. und dabey liegen die unterſten Brüche oder Glieder jeder Columne zum Grunde. Dieſe entſtehen eben ſo wie die oberſten aus der Multiplication der Binomialfactoren

1.(2—1).(3—1).(4—1).(5—1) ꝛc.

Digitized by Google

+11β−6α = 3844p + 3000 ...

+11γ−6δ = 1536q + 15000r + ꝛc.

...d nun, um q beyzubehalten, r weg-
, indem man jede Gleichung fünffach
genom-

genommen von der nächſtfolgenden abzieht; und ſo bleibt

$\varepsilon - 11\delta + 41\gamma - 61\beta + 30\alpha = -384q +$ ꝛc.

&c.

Hier werden demnach, weil man, anſtatt wie vorhin (§. 34.) vierfach abzuziehen, um m wegzuſchaffen nur einfach abgezogen worden, die Coefficienten der Werthe von q nicht durch die Multiplication der Factoren

$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1).$ꝛc.

ſondern der Factoren

$1.(2-1).(3-1).(1-1).(5-1)$ ꝛc.

erzeugt. Man kann zugleich aus dieſer Anmerkung abnehmen, wie die Factoren für n, p, r &c. ausſehen müſſen, da für jeden dieſer Buchſtaben ſtatt der 2, 3, 5 ꝛc. fachen, eine einfache Subtraction vorgenommen wird.

§. 36.

Wir wollen nun die Werthe von m, n, p, q &c. in nebenſtehender Tabelle vorſtellen.

§. 37.

Die Bildung dieſer Tabelle beruht fürnehmlich auf der Beſtimmung der Coefficienten, ſo in den Zählern dieſer Brüche vorkommen. Und dabey liegen die unterſten Brüche oder Glieder jeder Columne zum Grunde. Dieſe entſtehen eben ſo wie die oberſten aus der Multiplication der Binomialfactoren

$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1)$ꝛc.

die übrigen entſpringen aus dieſen durch ähnliche Factoren. So z. E. für q

$$(6-11+6-1).(5-1)=30-61+41-11+1$$

$$(30-61+41-11+1).(6-1)=180-396+307-107+17-1 \text{ ꝛc.}$$

Die Nenner aber ſind Producte aus Cubiczahlen und den natürlichen Zahlen 1, 2, 4 ꝛc.

§. 38.

Fig. V. Um nun den Gebrauch dieſer Tabelle zu zeigen, ſo wollen wir z. E. ſetzen, die fürgegebene Abſciſſe A P werde in 3 gleiche Theile getheilt, und es ſolle das Segment A M N quadrirt werden. Hier haben wir demnach (§. 32.)

$$S=S'''=\frac{2.27}{3}ax^4+\frac{3.81}{4}bx^4+\frac{4.243}{5}cx^5$$

folglich

$$\alpha=\frac{2.27}{3}=18$$

$$\beta=\frac{3.81}{4}=\frac{243}{4}$$

$$\gamma=\frac{4.243}{5}=\frac{972}{5}$$

und in vorſtehender Tabelle die dritte Columne

$$+m=\frac{6\alpha-5\beta+\gamma}{2}$$

$$-n=\frac{3\alpha-4\beta+\gamma}{8}$$

$$+p=\frac{2\alpha-3\beta+\gamma}{54}$$

Wel-

Werden in dieſen Formeln die Werthe von α, β, γ geſetzt, ſo erhält man

$$m = - \tfrac{27}{40}$$
$$n = - \tfrac{27}{40}$$
$$p = + \tfrac{107}{120}$$

demnach

$$AMN = \tfrac{107}{120} APMN - \tfrac{27}{40} Apmn - \tfrac{27}{40} A\pi\mu\nu$$

woraus man ſieht, der wievielte Theil von den drey Rectangeln müſſe genommen werden, um den Inhalt des Segmentes durch dieſe Näherung zu erhalten. Man erhält denſelben vollkommen, wenn die Gleichung für die krumme Linie wirklich nicht mehr als die drey erſten Glieder

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4$$

hat, oder auch nur

$$y = ax^2 + bx^3$$

oder endlich auch nur

$$y = ax^2$$

iſt.

§. 39.

Um aber ein Beyſpiel zu geben, wo dieſes nicht vorkömmt, und wo man folglich in der That nur eine Näherung erhält, ſo wollen wir ſetzen AM ſey ein Circulbogen von 30 Gr. und deſſen Halbmeſſer = 1. Hier haben wir demnach

$AP = \sin. 30^\circ = \tfrac{1}{2}$ $PM = 1 - \sqrt{\tfrac{3}{4}} = 0,1339746$
$Ap = \tfrac{2}{3} AP = \tfrac{1}{3}$ $pm = 1 - \sqrt{\tfrac{8}{9}} = 0,0571910$
$A\pi = \tfrac{1}{3} AP = \tfrac{1}{6}$ $\pi\mu = 1 - \sqrt{\tfrac{35}{36}} = 0,0139868$

und

und hieraus

$$APMN = 0,0669873$$
$$Apmn = 0,0190637$$
$$A\pi\mu\nu = 0,0023311$$

demnach den Inhalt des Segmentes AMN

$$= \tfrac{107}{120} APMN - \tfrac{27}{40} (Apmn + A\pi\mu\nu)$$
$$= 0,0452888$$

Es iſt aber der wahre Inhalt $= 0,0452930$

demnach der Unterſchied nur $= 0,0000042$

Da ſich dieſer Unterſchied erſt bey der ſechſten Dignität der Abſciſſe x zu äuſſern anfängt, ſo wird derſelbe 64 mal geringer, wenn man den Bogen nur halb ſo groß annimmt.

§. 40.

Setzt man, die Abſciſſe AP ſolle in 4 gleiche Theile getheilt werden, und man wolle ebenfalls das ganze Segment AMN quadriren, ſo haben wir $S = S^{IV}$, demnach (§. 32.)

$$\alpha = \frac{2.64}{3} = \frac{128}{3}$$
$$\beta = \frac{3.256}{4} = 192$$
$$\gamma = \frac{4.1024}{5} = \frac{4096}{5}$$
$$\delta = \frac{5.4096}{6} = \frac{10240}{3}$$

und aus der Tabelle (§. 36.)

+ m

$$+m = \frac{24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta}{6}$$

$$-n = \frac{12\alpha - 19\beta + 8\gamma - \delta}{16}$$

$$+p = \frac{8\alpha - 14\beta + 7\gamma - \delta}{54}$$

$$-q = \frac{6\alpha - 11\beta + 6\gamma - \delta}{384}$$

Werden in dieſen Formeln die Werthe von α, β, γ, geſetzt, ſo findet man nach geſchehener Reduction

$$m = -\tfrac{64}{45}$$
$$n = -\tfrac{4}{15}$$
$$p = -\tfrac{63}{135}$$
$$q = +\tfrac{83}{90}$$

demnach erhält man

$$S = \tfrac{83}{90} R^{IV} - \tfrac{63}{135} R''' - \tfrac{4}{15} R'' - \tfrac{64}{45} R'$$

§. 41.

Dieſe Formel giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0{,}0452925$$

welcher Werth von den wahren nur um 0,0000005 verſchieden iſt.

§. 42.

Wollte man hingegen die Abſciſſe AP nur in zween Theile theilen, ſo würde man, ebenfals für das ganze Segment AMN (§. 32. 36.)

$\alpha =$

$$\alpha = \tfrac{16}{3}$$
$$\beta = 12$$
$$+m = 2\alpha - \beta$$
$$-n = \alpha - \beta$$

und hieraus

$$m = -\tfrac{4}{3}$$
$$n = +\tfrac{5}{6}$$

demnach

$$S = \tfrac{5}{6}R'' - \tfrac{4}{3}R'$$

finden. Dieſe Formel giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0{,}0452481$$

welches um 0, 0000449 zu wenig iſt.

§. 43.

Würde man aber die Abſciſſe AP ganz behalten, ſo würde man (§. cit.)

$$\alpha = m = \tfrac{2}{3}$$

demnach

$$S = \tfrac{2}{3}R'$$

erhalten. Dieſes giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0{,}0446582$$

welches um 0,0006348 zu wenig iſt. Man ſieht demnach aus dieſen für einerley Segment gefundenen Unterſchieden

0,0006348
0,0000449
0,0000046
0, 0000005

Um wie viel man dem Wahren näher kömmt, wenn

wenn man die Abſciſſe in mehrere Theile theilt. Ueberdies werden dieſe Unterſchiede, wenn der Bogen ſelbſt kleiner iſt, in ungleicher Verhältnis kleiner. Denn wenn man nur die Hälfte des Bogens nimmt, ſo wird der erſte Unterſchied 16, der andere 32, der dritte 64, der vierte 128 mal kleiner.

§. 44.

Was aber bey allem dieſem beſonders anzumerken iſt, beſteht darin, daß die Coefficienten der Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

wodurch die Natur der krummen Lienie AM überhaupt ausgedruckt wird, keinen Einfluß auf die Beſtimmung der Buchſtaben m, n, p, q, r &c. haben, ungeachtet ſie daraus hergeleitet ſind. In der That beſtimmt dieſe Gleichung oder Reihe in jedem fürgegebenen Fall nur die Gröſſe der Rectangel R', R'', R''' &c. aus welchen ſodann S vermitelſt der Formel

$$S = mR' + nR'' + pR''' + \&c.$$

gefunden wird.

§. 45.

Sehen wir aber genauer nach, wie die Buchſtaben m, n, p &c. beſtimmt werden, ſo findet ſichs, daß wenn in der Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

wechſelsweiſe einige Glieder $= 0$ ſind, die Buchſtaben m, n, p &c. auf eine andere Art beſtimmt

werden

werden können. Wir wollen z. E. $b = d = f =$ &c. $= 0$ ſetzen, und ſo werden wir ſtatt den (§. 33.) angenommenen Gleichungen folgende

$$\alpha = m + 8n + 27p + 64q + \text{ꝛc.}$$
$$\gamma = m + 32n + 243p + 1024q + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon = m + 128n + 2187p + 16384q + \text{ꝛc.}$$
$$\eta = m + 512n + 19683p + 262144q + \text{ꝛc.}$$
&c.

haben, weil die für β, δ, ζ &c. daſelbſt angenommene Gleichungen hier wegbleiben können.

§. 46.

Die Auflöſung dieſer Gleichungen iſt nun der vorhergehenden ganz ähnlich. So wird um m zu finden, nach und nach n, p, q &c. weggeſchaft. Man zieht nemlich, um anfangs n wegzuſchaffen, jede Gleichung vierfach genommen, von der nächſtfolgenden ab, und ſo bleibt

$$\gamma - 4\alpha = -3m + 135p + 768q + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon - 4\gamma = -3m + 1215p + 12288q + \text{ꝛc.}$$
$$\eta - 4\varepsilon = -3m + 10935p + 196608q + \text{ꝛc.}$$
&c.

Um ferner p wegzuſchaffen, wird jede Gleichung 9 mal genommen, von der nächſtfolgenden abgezogen, und ſo bleibt

$$\varepsilon - 13\gamma + 36\alpha = 24m + 5376q + \text{ꝛc.}$$
$$\eta - 13\varepsilon + 36\gamma = 24m + 86016q + \text{ꝛc.}$$
&c.

Eben

Eben ſo wird q weggeſchaft, wenn jede Gleichung 16 mal genommen, von der nächſtfolgenden abgezogen wird, und ſo bleibt

$$\eta - 29\varepsilon + 244\gamma - 576\alpha = -360m + \text{ꝛc.}$$

Auf dieſe Art ſind nun der Ordnung nach die Werthe, ſo m erhält,

$$m = \alpha$$

$$m = \frac{4\alpha - \gamma}{3}$$

$$m = \frac{36\alpha - 13\gamma + \varepsilon}{3.8.}$$

$$m = \frac{576\alpha - 244\gamma + 29\varepsilon - \eta}{3.8.15.}$$

&c.

Die Coefficienten entſtehen nun hier aus der Multiplication der Factoren

$$1.(4-1).(9-1).(16-1).(25-1).\text{ꝛc.}$$

§. 47.

Die Werthe der übrigen Buchſtaben n, p, q &c. finden ſich auf eine ähnliche Art. So z. E. wird für p erſtlich

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \text{\&c.}$$

ferner

$\varepsilon - 5\gamma + 4\alpha = 27.(9-1).(9-4)p + 64(16-1).(16-4)q + \&c.$

ſodann

$\eta - 21\varepsilon + 84\gamma - 64\alpha = 27.(9-1)(9-4)(9-16)p + \&c.$

&c.

Hingegen erhält man für n

$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \&c.$

$\varepsilon - 10\gamma + 9\alpha = 8.(4-1)(4-9)n + 64(16-1)(16-9)q + \&c.$

$\eta - 26\varepsilon + 169\gamma - 144\alpha = 8.(4-1)(4-9)(4-16)n + \&c.$

&c.

Und eben ſo für q

$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \&c.$

$\varepsilon - 5\gamma + 4\alpha = 27(9-1).(9-4)p + 64.(16-1).(16-4)q + \&c.$

$\eta - 14\varepsilon + 49\gamma - 36\alpha = 64.(16-1).(16-4).(16-9).q + \&c.$

&c.

§. 48.

Hieraus erwächſt ſodann folgende Tabelle

$+ m =$

$+m=$	α	$\frac{4\alpha-\gamma}{4-1}$	$\frac{36\alpha-13\gamma+\varepsilon}{(4-1).(9-1)}$	$\frac{576\alpha-244\gamma+29\varepsilon-\eta}{(4-1).(9-1).(16-1)}$	ꝛc.
$-n=$	. . .	$\frac{\alpha-\gamma}{8.(4-1)}$	$\frac{9\alpha-10\gamma+\varepsilon}{8.(4-1).(9-4)}$	$\frac{144\alpha-169\gamma+26\varepsilon-\eta}{8.(4-1).(9-4).(16-4)}$	ꝛc.
$+p=$	. . .	. . .	$\frac{4\alpha-5\gamma+\varepsilon}{27.(9-1).(9-4)}$	$\frac{64\alpha-84\gamma+21\varepsilon-\eta}{27.(9-1).(9-4).(16-9)}$	ꝛc.
$-q=$	. . .	. . .	. . . . . .	$\frac{36\alpha-49\gamma+14\varepsilon-\eta}{64.(16-1).(16-4).(16-9)}$	ꝛc.

§. 49.

§. 49.

Der Gebrauch dieſer Tabelle iſt dem von der vorhergehenden ganz ähnlich, dagegen aber nicht ſo allgemein, weil er ſich nur auf die Fälle erſtreckt, wo

$$y = ax^2 + cx^4 + ex^6 + gx^8 + \&c.$$

iſt. Man ſetze z. E. die Abſciſſe werde nur in zween Theile getheilt, ſo haben wir $S = S''$, und daher (§. 32. 45.)

$$\alpha = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\gamma = \frac{4 \cdot 32}{5} = \frac{128}{5}$$

und aus der zweyten Columne der Tabelle (§. 48.)

$$+ m = \frac{4\alpha - \gamma}{4 - 1} = \frac{4\alpha - \gamma}{3}$$

$$- n = \frac{\alpha - \gamma}{8 \cdot (4 - 1)} = \frac{\alpha - \gamma}{24}$$

folglich

$$m = - \tfrac{64}{45}$$
$$n = + \tfrac{38}{45}$$

und daher

$$S = \tfrac{38}{45} R'' - \tfrac{64}{45} R'$$

§. 50.

Da bey dem Circul die Bedingung

$$y = ax^2 + cx^4 + ex^6 + gx^8 + \&c.$$

vorkömmt, ſo wollen wir wiederum einen Circulbogen

culbogen von 30 Gr. für AM ſetzen, und da giebt die erſt gefundene Formel

$$S = 0,0452767$$

welches nur um 0,0000163 von dem Wahren abweicht. Ein Unterſchied, der beynahe drey mal geringer iſt, als derjenige, den wir für eben dieſen Fall (§. 42.) aus den erſten Formeln gefunden haben.

§. 51.

Wir können nun ferners eben dieſe Methode auch auf diejenigen Fälle ausdehnen, wo die bisher vorausgeſetzte Bedingung (§. 31.) wegfällt, und daher die Lage der Abſciſſenlinie ganz willkührlich gelaſſen wird. Es ſey demnach BM ein Stück einer krummen Linie. Auf AP werden die Abſciſſen von A an gerechnet, und die Ordinaten ſeyn auf dieſer Linie ſenkrecht. Solte nun das Stück ABMP quadrirt werden, ſo kann man wiederum, wie vorhin, die Abſciſſe AP in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen; und da iſt die Frage, wie der geſuchte Inhalt von ABMP durch die vermittelſt ſolcher Theilung entſtehende Rectangel APMN, Apmn, $A\pi\mu\nu$ &c. beſtimmt werden könne, und wie durch eben dieſelbe der Inhalt der einzeln Theile $AB\mu\pi$, ABmp rc. beſtimmt werde? Fig. VI.

§. 52.

Es ſey

$$A\pi = x \quad Ap = 2x \quad AP = 3x \ \&c.$$
$$\pi\mu = y' \quad pm = y'' \quad PM = y''' \ \&c.$$

und die Verhältniß zwiſchen x, y werden durch die Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

ausgedrückt. Man nenne ferner die Segmente S′, S″, S‴ &c. und die Rectangel R′, R″, R‴ &c. ſo haben wir

$$R' = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + ꝛc.$$
$$R'' = 2ax + 4bx^2 + 8cx^3 + 16dx^4 + 32ex^5 + ꝛc.$$
$$R''' = 3ax + 9bx^2 + 27cx^3 + 81dx^4 + 243ex^5 + ꝛc.$$
$$R^{IV} = 4ax + 16bx^2 + 64cx^3 + 256dx^4 + 1024ex^5 + ꝛc.$$

&c.

Ferner

$$S' = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{4}dx^4 + \tfrac{1}{5}ex^5 + ꝛc.$$
$$S'' = 2ax + \tfrac{4}{2}bx^2 + \tfrac{8}{3}cx^3 + \tfrac{16}{4}dx^4 + \tfrac{32}{5}ex^5 \ldots$$
$$S''' = 3ax + \tfrac{9}{2}bx^2 + \tfrac{27}{3}cx^3 + \tfrac{81}{4}dx^4 + \tfrac{243}{5}ex^5 \ldots$$
$$S^{IV} = 4ax + \tfrac{16}{2}bx^2 + \tfrac{64}{3}cx^3 + \tfrac{256}{4}dx^4 + \tfrac{1024}{5}ex^5 \ldots$$

wofür wir überhaupt

$$S = \alpha ax + \beta bx^2 + \gamma cx^3 + \delta dx^4 + \varepsilon ex^5 + ꝛc.$$

ſetzen, welche Reihe ſich auch auf die zwiſchen die Theilungspuncte fallende Abſciſſen x ausdehnet, weil auch dieſe Räume $\int y\,dx$ durch die Rectangel R′, R″, R‴ &c. beſtimmen laſſen.

§. 53.

§. 53.

Man ſetze nun wiederum

$$S = mR' + nR'' + pR''' + qR^{IV} + \&c.$$

ſo erhält man aus gleichem Grunde, wie §. 33. die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha &= m + 2n + 3p + 4q + 5r + \text{ꝛc.}\\
\beta &= m + 4n + 9p + 16q + 25r + \text{ꝛc.}\\
\gamma &= m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{ꝛc.}\\
\delta &= m + 16n + 81p + 256q + 625r + \text{ꝛc.}\\
\varepsilon &= m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{ꝛc.}\\
&\&c.
\end{aligned}$$

Demnach ſind die Gleichungen wodurch m beſtimmt wird

$$\begin{aligned}
\alpha &= m + 2n + 3p + 4q + 5r + \&c.\\
\beta - 2\alpha &= (1-2)m + 3(3-2)p + 4(4-2)q + 5(5-2)r + \&c.\\
\gamma - 5\beta + 6\alpha &= (1-2).(1-3)m + 4(4-2).(4-3)q + 5(5-2)(5-3)r + \&c.\\
\delta - 9\gamma + 26\beta - 24\alpha &= (1-2).(1-3).(1-4)m + 5.(5-2).(5-3).(5-4)r + \&c.\\
\varepsilon - 14\delta + 71\gamma - 154\beta + 120\alpha &= (1-2).(1-3).(1-4).(1-5)m + \&c.\\
&\&c.
\end{aligned}$$

Ferner die Gleichung wodurch n beſtimmt wird

$$\begin{aligned}
\beta - \alpha &= 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.\\
\gamma - 4\beta + 3\alpha &= 2(2-1)(2-3)n + 4.(4-1)(4-3)q + 5(5-1)(5-3)r + \&c.
\end{aligned}$$

$\delta - 8\gamma + 19\beta - 12\alpha = 2(2-1).2-3).$
$(2-4)n + 5.(5-1).(5-3).(5-4).r +$ &c.

$\varepsilon - 13\delta + 59\gamma - 107\beta + 60\alpha = 2.(2-1).$
$(2-3).(2-4).(2-5)n +$ &c.

&c.

Eben ſo die Gleichungen, wodurch die Werthe von p beſtimmt werden

$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p +$
$4(4-1)q + 5(5-1)r +$ &c.

$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1).$
$(4-2)q + 5.(5-1).(5-2)r +$ &c.

$\delta - 7\gamma + 14\beta - 8\alpha = 3(3-1)(3-2)$
$(3-4)p + 5.(5-1).(5-2).(5-4)r +$ &c.

$\varepsilon - 12\delta + 49\gamma - 78\beta + 40\alpha = 3(3-1).$
$(3-2).(3-4).(3-5)p +$ &c.

&c.

Wiederum die Gleichungen, wodurch q beſtimmt wird

$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p +$
$4(4-1)q + 5.(5-1)r +$ &c.

$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p +$
$4(4-1)(4-2)q + 5(5-1).(5-2)r +$ &c.

$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 4(4-1)(4-2)$
$(4-3)q + 5.(5-1).(5-2).(5-3)r +$ &c.

$\varepsilon - 11\delta + 41\gamma - 61\beta + 30\alpha = 4(4-1)$
$(4-2)(4-3)(4-5)q +$ &c.

&c.

Sodann die Gleichungen, wodurch r beſtimmt wird

$\beta -$

$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p +$
$4(4-1)q + 5(5-1)r$ [illegible]

ad p

14 $\delta + \varepsilon$	720 α — 104
3 $\delta + \varepsilon$	360 α — 7[illegible]
2 $\delta + \varepsilon$	240 α — 5[illegible]
1 $\delta + \varepsilon$	180 α — 3[illegible]
0 $\delta + \varepsilon$	144 α — 3
	120 α — 2

$\beta = \frac{9}{2}$

$\gamma = \frac{27}{3} = 9$

$\delta - 8\gamma + 19\beta - 12\alpha = 2(2-1).2-3).$
$(2-4)n + 5.(5-1).(5-3).(5-4).r +$ &c.

Sodann die Gleichungen, wodurch r beſtimmt wird

ϐ —

Digitized by Google

$$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$$

$$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1)(4-2)q + 5(5-1)(5-2)r + \&c.$$

$$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 4(4-1)(4-2)(4-3)q + 5(5-1)(5-2)(5-3)r + \&c.$$

$$\varepsilon - 10\delta + 35\gamma - 50\beta + 24\alpha = 5.(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)r + \&c.$$

&c.

§. 54.

Aus dieſen Gleichungen entſtehet ſodann beygefügte Tabelle.

§. 55.

Vergleicht man dieſe Tabelle mit der erſtern (§. 36.) ſo iſt ſie davon nur in den Cubiczahlen verſchieden, welche hier in den Nennern nicht vorkommen, und an deren Statt nur die ledigen Zahlen, oder die Cubicwurzeln, hier als Theiler erſcheinen.

§. 56.

Der Gebrauch dieſer Tabelle iſt dem von beyden vorhergehenden ganz ähnlich. Es ſey z. E. ABMP zu quadriren, und die Abſciſſe AP in drey gleiche Theile getheilt; ſo haben wir $S = S'''$, demnach (§. 52.)

$$\alpha = 3$$
$$\beta = \tfrac{9}{2}$$
$$\gamma = \tfrac{27}{3} = 9$$

und aus der dritten Columne dieſer Tabelle

$$+m = \frac{6\alpha - 5\beta + \gamma}{2}$$

$$-n = \frac{3\alpha - 4\beta + \gamma}{2}$$

$$+p = \frac{2\alpha - 3\beta + \gamma}{6}$$

Setzt man in dieſen Formeln die Werthe von α, β, γ, ſo erhält man

$$m = \tfrac{9}{4}$$
$$n = 0$$
$$p = \tfrac{1}{4}$$

demnach, weil $n = 0$ wird,

$$S''' = \tfrac{1}{4}R''' + \tfrac{9}{4}R'$$

Man kann daher, ſo oft man ſich mit einer Triſection der Abſciſſe begnügen will, das mittlere Rectangel weglaſſen, und ſchlechthin

$$ABMP = \tfrac{1}{4}ANMP + \tfrac{9}{4}A\nu\mu\pi$$

ſetzen.

§. 57.

Dieſes Phänomenon, daß man nemlich eines von den Rectangeln gar nicht gebraucht, kömmt auch in andern Fällen vor. So z. E. wenn man ſich mit der Biſection der Abſciſſe begnügt, hat man (§. 52. 54.) $S = S''$

$$\alpha = 2$$
$$\beta = \tfrac{4}{2} = 2$$
$$m = 2\alpha - \beta = 2$$
$$n = \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

folg-

folglich ſchlechthin

$$S'' = 2\,R'.$$

§. 58.

Eben ſo wenn man die Abſciſſe in 4 Theile theilt, $S = S^{IV}$, und (§. cit.)

$$\alpha = 4$$
$$\beta = \tfrac{16}{2} = 8$$
$$\gamma = \tfrac{64}{3}$$
$$\delta = \tfrac{256}{4} = 64$$

$$+m = \frac{24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta}{6} = \tfrac{8}{3}$$

$$-n = \frac{12\alpha - 19\beta + 8\gamma - \delta}{4} = \tfrac{1}{3}$$

$$+p = \frac{8\alpha - 14\beta + 7\gamma - \delta}{6} = \tfrac{8}{9}$$

$$-q = \frac{6\alpha - 11\beta + 6\gamma - \delta}{24} = 0$$

demnach

$$S^{IV} = * \tfrac{8}{9} R''' - \tfrac{2}{3} R'' + \tfrac{8}{3} R'$$

§. 59.

Hingegen erhält man, wenn die Abſciſſe in fünf gleiche Theile getheilt wird

$$S^{V} = \tfrac{19}{144} R^{V} - \tfrac{25}{288} R^{IV} + \tfrac{25}{18} R''' - \tfrac{175}{144} R'' + \tfrac{425}{144} R'$$

wobey alle fünf Rectangel müſſen berechnet werden.

§. 60.

Digitized by Google

§. 60.

Ueberhaupt betrachtet, ſind dieſe Formeln weniger convergirend als diejenigen, ſo wir oben für den Fall der fünften Figur gefunden haben. Man hat den Grund davon darin zu ſuchen, daß hier in der Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

die erſten zwey Glieder beybehalten werden. Da nun z. E. wenn man die Abſciſſe A P in drey Theile theilt, und dadurch

$$ABMP = \tfrac{1}{4} ANMP + \tfrac{3}{4} A\nu\mu\pi$$

erhält, (§. 56.) dieſe Formel eigentlich nur da nach aller Schärfe ſtatt hat, wo

$$y = a + bx + cx^2$$

iſt, ſo ſieht man leicht, daß in jeden andern Fällen der Fehler, den man dadurch zuläßt, von den übrigen Gliedern

$$dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

herrührt, und in Abſicht auf den Raum ABMP,

$$= \tfrac{1}{4} dx^4 + \tfrac{1}{5} ex^5 + \tfrac{1}{6} fx^6 + \&c.$$

iſt. Daher muß auch die Abſciſſe $A\pi = x$ klein genug ſeyn, wenn man dieſen Unterſchied ſolle weglaſſen können. Da dieſer Unterſchied ſich hier bey der vierten Dignität von x anfängt, ſo kömmt man den Wahren 16 mal näher, wenn x um die Hälfte kleiner angenommen wird.

§. 61.

§. 61.

Dieſe Formeln haben übrigens die Bequemlichkeit, daß man dadurch krumme Linien, ſo genau man will, quadriren kann, ſo bald ſie conſtruirt ſind; und in ſoferne haben ſie ſelbſt auch in der practiſchen Geometrie ihren Nutzen, wo nicht ſelten Felder auszumeſſen vorkommen, deren Grenzlinien ſich in die Krümme ziehen. Solche kann man nun in Segmente, dergleichen ABMP iſt, eintheilen, und ihren Inhalt, vermittelſt der Rectangel Aμ, Am, AM, beſtimmen.

§. 62.

Man nimmt zu dieſem Ende, wenn z. E. aq eine ſolche Linie iſt, auf AQ, ſo viele gleiche Theile AB, BC, CD &c. man will, und richtet aus denſelben Perpendiculairen Aa, Bb auf. Auf dieſe Art wird man, wenn man dieſe Theile zu 3 und 3 nimmt nach der Formel des §. 56. Fig. VII.

$$AadD = \frac{9}{4} AB.Bb + \frac{1}{4} AD.Dd = \frac{3}{4} AB(Dd + 3Bb)$$
$$DdgG = \frac{3}{4} AB(Gg + 3Ee)$$
$$GgkK = \frac{3}{4} AB(Kk + 3Hh)$$
$$KknN = \frac{3}{4} AB(Nn + 3Ll)$$
$$NnqQ = \frac{3}{4} AB(Qq + 3Oo)$$

daher den ganzen Inhalt

$$AaqQ = \frac{3}{4} AB(Dd + Gg + Kk + Nn + Qq) + \frac{9}{4} AB(Bb + Ee + Hh + Ll + Oo)$$

erhalten, welcher deſto genauer ſeyn wird, von jewe-

jeweniger Graden die Krümmung der Bögen ab, bc, cd &c. iſt.

§. 63.

Man erhält aber den Inhalt genauer, wenn man die Theile auf AQ zu 4 und 4 nimmt. Alsdann dient die Formel des 58 §. und es iſt

$$AaeE = \tfrac{8}{3} AB.Bb - \tfrac{2}{3} AC.Cc + \tfrac{8}{9} AD.Dd$$
$$= \tfrac{4}{3} AB(2Bb - Cc + 2Dd)$$
$$EeiI = \tfrac{4}{3} AB(2Ff - Gg + 2Hh)$$
$$IiNn = \tfrac{4}{3} AB(2Kk - Ll + 2Mn)$$
&c.

daher der Inhalt

$$AanN = \tfrac{8}{3} AB(Bb + Dd + Ff + Hh + Kk + Mm)$$
$$- \tfrac{4}{3} AB(Cc + Gg + Ll).$$

§. 64.

Will man den Inhalt noch genauer haben, ſo nimmt man die Theile auf AQ zu 5 und 5, und gebraucht die Formel des §. 59. Denn ſo wird

$$AafF = \tfrac{425}{144} AB.Bb - \tfrac{175}{144}. AC.Cc + \tfrac{25}{18}. AD.Dd$$
$$- \tfrac{25}{288} AE.Ee + \tfrac{19}{144}. AF.Ff$$

oder

$$AafF = \tfrac{10}{288} AB(85.Bb - 70.Cc + 120.Dd - 10.Ee + 19.Ff)$$
$$FflL = \tfrac{10}{288} AB(85.Gg - 70.Hh + 120.Ii - 10.Kk + 19.Ll)$$
$$LlqQ = \tfrac{10}{288} AB(85.Mm - 70.Nn + 120.Oo - 10.Pp + 19.Qq)$$

ſeyn.

§. 65.

§. 65.

Man kann aber auch ſchlechthin nur die Puncte a, d, g, k, n, q durch gerade Linien zuſammenhängen, welche ſodann ein geradlinichtes Vieleck ausmachen, welches ſich leicht berechnen läßt. Und ſo bleiben nur noch die Segmente zu berechnen, welche auf dieſen Chorden ſtehen, und theils zu dem Vielecke addirt, theils ſubtrahirt werden müſſen, je nachdem ſie auſſer- oder innerhalb demſelben liegen. Es ſey A m M n A ein ſolches Segment, ſo wird die Chorde A M mit der Höhe m n multiplicirt, und von dem Producte $\frac{2}{3}$ genommen, weil, wie wir oben (§. 23. 28.) geſehen haben, der Inhalt deſto genauer $= \frac{2}{3} . AM . mn$ iſt, je weniger der Bogen A m M von der Krümmung der denſelben oſculirenden Parabel abweicht. Fig. II.

§. 66.

Bey den bisher (§. 52 ſeqq.) betrachteten Formeln, haben wir noch immer geſetzt, daß die Abſciſſen von A gegen P gerechnet, und daher ſämtlich poſitiv genommen werden. Nimmt man aber eben ſo viele negative Abſciſſen mit in die Rechnung, ſo wird dieſe ganz geändert, und man reicht damit doppelt weiter, weil man die gleichnahmigten Rectangel auf beyden Seiten in eines zuſammen nehmen kann. Es ſey z. E. das Segment P′ M′ M P zu quadriren, ſo wird die Abſciſſe P′ P in 2, 4, 6, 8 ꝛc. gleiche Fig. VI. Fig. VIII.

Theile

Theile getheilt, und aus den Theilungspuncten perpendiculaire Ordinaten aufgerichtet. Die mittlere dieſer Ordinaten ſey A B. Und die Abſciſſen werden von dem Punct A an gegen P und P′ vor- und rückwerts gerechnet. Zieht man die Puncte M′ M, m′ m, $\mu' \mu$ durch gerade Linien zuſammen, ſo ergeben ſich die Trapeze P′ M′ M P, p′ m′ m p, $\pi' \mu' \mu \pi$, deren Inhalt der Summe zweyer gleichnahmigten Rectangel $AP' . P'M' + AP . PM$ &c. gleich iſt.

§. 67.

Man ſetze nun wiederum $A\pi = x$, $\pi\mu = y$, und

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

und nenne die Trapeze T′, T″, T‴ &c. die denſelben entſprechende Segmente S′, S″, S‴ ꝛc. ſo findet man

$$T' = 2ax + 2cx^3 + 2ex^5 + 2gx^7 + \text{ꝛc.}$$
$$T'' = 4ax + 16cx^3 + 64ex^5 + 256gx^7 + \text{ꝛc.}$$
$$T''' = 6ax + 54cx^3 + 486ex^5 + 4374gx^7 + \text{ꝛc.}$$
&c.

$$S' = 2ax + \tfrac{2}{3}cx^3 + \tfrac{2}{5}ex^5 + \tfrac{2}{7}gx^7 + \text{ꝛc.}$$
$$S'' = 4ax + \tfrac{16}{3}cx^3 + \tfrac{64}{5}ex^5 + \tfrac{256}{7}gx^7 + \text{ꝛc.}$$
&c.

wofür wir überhaupt

$$S = 2\alpha ax + 2\gamma cx^3 + 2\varepsilon ex^5 + 2\eta gx^7 + \text{ꝛc.}$$

ſetzen,

ſetzen, um auf eine allgemeine Art die Trapeze T', T'', T''' &c. mit jeden Segmenten vergleichen zu können.

§. 68.

Zu dieſem Ende ſetzen wir wiederum

$$S = mT' + nT'' + pT''' + \&c.$$

und erhalten dadurch die Gleichungen.

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \text{rc.}$$
$$\gamma = m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{rc.}$$
$$\varepsilon = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{rc.}$$
$$\eta = m + 128n + 2187p + 16384q + 78125r + \text{rc.}$$
&c.

§. 69.

Hieraus erhält man folgende Tabelle, welche von derjenigen, ſo wir oben (§. 48.) aus ganz ähnlichen Gleichungen gefunden, nur darinn verſchieden iſt, daß in den Nennern ſtatt der Cubiczahlen 1, 8, 27, 64 rc. ihre Wurzeln 1, 2, 3, 4 rc. vorkommen.

$+m=$	α	$\frac{4\alpha-\gamma}{4-1}$	$\frac{36\alpha-13\gamma+\varepsilon}{(4-1).(9-1)}$	$\frac{576\alpha-244\gamma+29\varepsilon-\eta}{(4-1).(9-1).(16-1)}$	ꝛc.
$-n=$	...	$\frac{\alpha-\gamma}{2(4-1)}$	$\frac{9\alpha-10\gamma+\varepsilon}{2(4-1)(9-4)}$	$\frac{144\alpha-169\gamma+26\varepsilon-\eta}{2.(4-1)(9-4)(16-4)}$	ꝛc.
$+p=$	...	...	$\frac{4\alpha-5\gamma+\varepsilon}{3(9-1)(9-4)}$	$\frac{64\alpha-84\gamma+21\varepsilon-\eta}{3.(9-1).(9-4).(16-9)}$	ꝛc.
$-q=$	...	...	...	$\frac{36\alpha-49\gamma+14\varepsilon-\eta}{4(16-1).(16-4).(16-9)}$	ꝛc.

§. 70.

Setzt man nun z. E. die Abſciſſe $P'P$ werde in 6 gleiche Theile getheilt, ſo haben wir $S = S'''$, und daher (§. 67.)

$$\alpha = 3$$
$$\gamma = \frac{27}{3} = 9$$
$$\varepsilon = \frac{243}{5}$$

und aus der dritten Columne dieſer Tabelle

$$+m = \frac{36\alpha - 13\gamma + \varepsilon}{24}$$
$$-n = \frac{9\alpha - 10\gamma + \varepsilon}{30}$$
$$+p = \frac{4\alpha - 5\gamma + \varepsilon}{120}$$

demnach

$$m = \frac{33}{20}$$
$$n = \frac{12}{25}$$
$$p = \frac{13}{100}$$

und

$$S''' = \frac{33}{20}T' + \frac{12}{25}T'' + \frac{13}{100}T'''$$

§. 71.

Da nun

$$T' = A\pi(\pi\mu + \pi'\mu')$$
$$T'' = 2A\pi(pm + p'm')$$
$$T''' = 3A\pi(PM + P'M')$$

iſt, ſo iſt der ganze Raum

$$P'M'MP = \frac{33}{20}A\pi(\pi\mu + \pi'\mu') + \frac{24}{25}A\pi(pm + p'm') + \frac{39}{100}A\pi(PM + P'M').$$

Digitized by Google

Dieſe Formel fängt nun erſt bey der ſiebenten Dignität des x an von dem wahren Inhalt des Segments P′M′MP abzuweichen.

§. 72.

Man kan aber das Convergiren dieſer Formeln noch weiter treiben, weil ſich der hier betrachtete Fall (§. 66. ſeq.) auf denjenigen reduciren läßt, den wir oben (§. 45. ſeq.) betrachtet haben. Es ſey HKO eine jede krumme Linie, die Abſciſſen werden auf VR von A an vor- und rückwärts genommen, und die Ordinaten ſeyn auf denſelben ſenkrecht. Man mache nun AR = AV, und indem man die Ordinaten VH, RO aufrichtet, und die Chorde HCO zieht, ſo ziehe man ſodann hCo durch C mit VR parallel, ſo wird man auf dieſe Art die krumme Linie hBo conſtruiren können, die ihren Scheitelpunct in B hat, deren Axe AB iſt, und deren Theile auf beyden Seiten dieſer Axe einander ähnlich ſind, und ſo wird auch jeder Raum

Fig. IX.

$$VhBoR = VHBOR.$$

ſeyn. Denn man ſetze jede Abſciſſe

$$AQ = x \qquad QN = y$$
$$AT = -x \qquad TL = \eta$$
$$Qn = Tl = z,$$

und $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$

ſo iſt

$$\eta = a - bx + cx^2 - dx^3 + \&c.$$

Dem-

demnach

$$\frac{y+\eta}{2} = a + cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

Nun aber iſt

$$\frac{y+\eta}{2} = \frac{QN+TL}{2} = Ac = Qn = Tl = z$$

demnach

$$z = a + cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

Da nun hier lauter gerade Dimenſionen ſind, ſo iſt die Linie hBo auf beyden Seiten der Linie AB ſich ſelbſt ähnlich, — B ihr Scheitelpunct und BC ihre Axe. Ferner iſt der Raum

$$ABNQ = \int y\,dx = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{4}dx^4 + \tfrac{1}{5}ex^5 + \&c.$$

$$ABLT = \int \eta\,dx = ax - \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 - \tfrac{1}{4}dx^4 + \tfrac{1}{5}ex^5 + \&c.$$

folglich der ganze Raum

$$QNBLT = 2ax + \tfrac{2}{3}cx^3 + \tfrac{2}{5}ex^5 + \tfrac{2}{7}gx^7 + \&c.$$

Eben dieſe Reihe findet ſich aber auch für den Raum $QnBlT$, demnach ſind dieſe beyden Räume einander gleich. Es iſt daher gleichviel, ob man $VHBOR$ oder $VhBoR$ quadrirt. Nun läßt ſich das Rectangel $VhoR$ für ſich berechnen, demnach hat man nur noch das Segment $hCoBh$ zu quadriren, und für dieſes hat man die Gleichung

$$z - a = cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

welche eben die iſt, die wir bey dem oben (§. 45. ſeqq.) betrachteten Fall zum Grunde leg-

legten. Es wird demnach hiedurch ihr Gebrauch vollends allgemein gemacht.

§. 73.

Wenn es hiebey nur darum zu thun iſt, das Segment HBOCH zu quadriren, ſo wird die Lage der Abſciſſenlinie gleichgültig, und man thut dabey am beſten, wenn man ſie mit der Chorde HO parallel zieht, oder die Abſciſſen ſelbſt auf dieſer Chorde von dem Mittel C gegen O und H gerechnet nimmt, und die Ordinaten ſenkrecht aufrichtet. Dadurch erhält man den Vortheil, daß das Segment hBoCh ſowohl länger als ſchmähler, und daher aus beyden Gründen die Krümmung des Bogens hBo vermindert wird. Ich werde mich aber nicht länger hiebey aufhalten, ſondern dieſen Betrachtungen noch einige andere beyfügen, welche die durch Näherung zu beſtimmende Rectification und Quadratur des Circuls beſonders betreffen.

§. 74.

Fig. XI. Es ſey AMNB ein halber Circul, und man habe die Länge des Bogens AM zu beſtimmen. Zu dieſem Ende richte man auf AB die Tangente AQ ſenkrecht auf, und trage den dritten Theil des Bogens AM aus B in N. Man ziehe ſodann durch NM eine gerade Linie bis in Q, ſo wird AQ der Länge des Bogens AM deſto näher kommen, von jewenigern Graden derſelbe iſt.

§. 75.

§. 75.

Um dieſes zu beweiſen, ſetze man den Halbmeſſer $AC = 1$, den Winkel $NCB = \omega$, ſo iſt

$$MCA = 3\omega$$
$$CMN = CNM = 2\omega$$
$$CFN = \omega,$$

demnach

$$CF = 2\,\mathrm{coſ.}\,\omega$$
$$AF = 1 + 2\,\mathrm{coſ.}\,\omega.$$

Nun iſt

$$AQ = AF.\,\mathrm{tang.}\,\omega$$

folglich

$$AQ = (1 + 2\,\mathrm{coſ.}\,\omega)\,\mathrm{tang.}\,\omega = \mathrm{tang.}\,\omega + 2\,\mathrm{ſin.}\,\omega.$$

Man kann demnach aus dem §. 11. ſehen, wie dieſer Werth dem wahren Werthe des Bogens näher kömmt. Oder da

$$\mathrm{tang.}\,\omega = \omega + \tfrac{1}{3}\omega^3 + \tfrac{2}{15}\omega^5 + \tfrac{17}{315}\omega^7 + \&c.$$
$$2\,\mathrm{ſin.}\,\omega = \omega - \tfrac{1}{3}\omega^3 + \tfrac{1}{60}\omega^5 - \tfrac{1}{2520}\omega^7 + \&c.$$

folglich

$$AQ = 3\omega * + \tfrac{3}{20}\omega^5 - \tfrac{3}{56}\omega^7 + \&c.$$

iſt, ſo ſieht man hieraus, daß AQ von der wahren Länge des Bogens AM erſt in der fünften Dignität von ω anfängt verſchieden zu ſeyn, oder daß

$$AQ - AM = \tfrac{1}{1620}AM^5 - \tfrac{1}{41824}AM^7 + \text{rc.}$$

iſt.

§. 76.

Man kommt aber der Wahrheit ungleich näher, wenn man auf folgende Art verfährt: Es ſey AMB ein halber Circul, und die Länge Fig. XII.

des Bogens A M zu ſuchen. Zu dieſem Ende richtet man A Q auf A B ſenkrecht auf, und ziehe aus M den Sinus M P. Man theile A P in 5 gleiche Theile, und trage C e aus B in E. Wird nun durch E und M eine gerade Linie E M Q gezogen, ſo wird A Q noch genauer, als vorhin, der Länge des Bogens gleich ſeyn. Denn ſetzt man $AC = CB = BD = 1$, $AM = \varphi$, ſo iſt

$$CP = \text{coſ.}\,\varphi, \qquad PM = \text{ſin.}\,\varphi$$
$$AP = (1 - \text{coſ.}\,\varphi)$$
$$ED = \tfrac{1}{5} AP = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{5}\,\text{coſ.}\,\varphi$$
$$BE = \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{5}\,\text{coſ.}\,\varphi$$
$$PE = \tfrac{9}{5} + \tfrac{6}{5}\,\text{coſ.}\,\varphi$$
$$AE = \tfrac{14}{5} + \tfrac{1}{5}\,\text{coſ.}\,\varphi.$$

Da nun

$$AQ = \frac{PM.AE}{PE}$$

iſt, ſo iſt

$$AQ = \frac{(14 + \text{coſ.}\,\varphi)\,\text{ſin.}\,\varphi}{9 + 6\,\text{coſ.}\,\varphi} = \frac{28\,\text{ſ.}\,\varphi + \text{ſ.}\,2\varphi}{18 + 12\,\text{coſ.}\,\varphi}$$

Da nun

$$\text{ſin.}\,\varphi = \varphi - \frac{1}{2.\,3}\varphi^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\varphi^5 - \text{ꝛc.}$$

$$\text{ſin.}\,2\varphi = 2\varphi - \frac{8}{2.\,3}\varphi^3 + \frac{32}{2.3.4.5}\varphi^5 - \text{ꝛc.}$$

$$\text{coſ.}\,\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2.\,3.\,4}\varphi^4 - \text{ꝛc.}$$

iſt, ſo findet ſich, wenn man dieſe Reihen in der Formel A Q ſetzt, und die Theilung vornimmt

AQ =

$$AQ = v - \frac{1}{2700} v^7 + \text{rc.}$$

ſo, daß alſo der Unterſchied zwiſchen AQ und dem Bogen AM ſich erſt in der 7ten Dignität des Bogens zu äuſſern anfängt. Und wenn auch der Bogen v = 1 wird, ſo iſt dieſer Unterſchied dennoch nur $\frac{1}{2700}$ Theil des Halbmeſſers. Nimmt man aber den Bogen um die Hälfte kleiner, ſo wird der Fehler bey jeder Biſection 128 mal geringer. Wenn demnach die Länge eines Circulbogens durch Conſtruction zu beſtimmen iſt, ſo iſt die hier angegebene ſo leicht und ſo genau man es verlangen kann.

§. 77.

Werden aber die beyden erſt angegebene Conſtructionen mit einander verglichen, ſo findet ſichs ohne Mühe, daß auch bey der letztern Conſtruction der Bogen BN von dem dritten Theile des Bogens AM gar unmerklich verſchieden iſt, und daß man folglich dadurch einen Bogen ſehr genau in 3 Theile theilen kann. Denn wenn je der Bogen AM gar zu groß iſt, ſo darf man nur denſelben halbiren, und den dritten Theil von ſeiner Hälfte ſuchen, und dieſe ſodann verdoppeln.

X.

Anmerkungen und Zuſätze zur Gnomonic.

§. 1.

Tab. III. IV. V. Man wird nicht leicht eine Wiſſenſchaft finden, die in ſo viele verſchiedene Formen gebracht, und auf ſo unzählig mannigfaltige Art angewandt worden, als die Gnomonic. Man kann anſtehen, ob es möglich ſey, eine Art von Sonnen-Uhren zu erdencken, die nicht ſchon irgend beſchrieben und angebracht worden wäre. Selbſt auch die Methode, jede Sonnenuhr zu zeichnen, und die dazu dienlichen Inſtrumente und Tabellen ſind eben ſo häufig als mannigfaltig. Es ſcheint daher daß, was man noch etwann darüber erfinden kann, ſchlechthin nur eine Nachleſe iſt, und daß man alle über die Gnomonic herausgekommene Schriften müſſe durchgangen haben, wenn man ſich berechtiget achten will, es eine Nachleſe zu nennen.

§. 2.

Betrachtungen von dieſer Art, bothen ſich mir bey dem Entſchluſſe an, hier einige Anmerkungen über die Gnomonic zu liefern. Ich habe lange nicht alle Schriften über dieſe Wiſſen-

Digitized by Google

Wiſſenſchaft geleſen, und in ſoferne muß ich unentſchieden laſſen, ob, was ich hier vortragen werde, durchaus neu ſey oder nicht. Ich kann aber darauf zählen, daß ſich viele meiner Leſer in eben dem Fall befinden, und daß es folglich denſeben ſo gut neu ſeyn werde, als es mir wäre, da ich darauf verfiele. Verſchiedenes davon wird dienen zu zeigen, daß öfters die erſten Erfinder zufrieden ſind, wenn ſie etwas finden.

I. Anmerkungen über die Azimuthaluhren.

§. 3.

Die Azimuthaluhren ſind vielleicht zuerſt erfunden, und zuletzt berichtigt worden. Ich will ſagen, der erſte, der ſich in Sinn kommen lieſſe, die Zeit nach dem Schatten der Sonne zu meſſen, ſteckte etwan einen Stab gerade aufgerichtet in die Erde, beſchrieb einen Circul darum, und theilte denſelben, ſo gut er es verſtunde, in Stunden, und vermuthlich machte er jede Stunde gleich groß. Von dieſem erſten Anfange an, bis zu der Bemerkung, daß man die Stunden ungleich machen, und ſie entweder von Tag zu Tag ändern, oder dem Zeiger eine ſchiefe mit der Weltaxe parallele Lage geben müſſe, war noch ſehr weit, und es muſten vorerſt die Gründe der ſpähriſchen Aſtronomie erfunden werden, welche ſodann zeig-

zeigten, daß man nicht bey Azimuthaluhren, ſondern bey Aequinoctialuhren den Anfang machen müſſe.

§. 4.

Indeſſen muß man doch ſagen, daß der erſte Einfall, die Zeit nach dem Schatten eines aufrechtſtehenden Stabes zu meſſen, auf die genaueſte Sonnenuhr führte, weil in der That die Azimuthaluhren allein von den Anomalien der Refraction frey ſind. Da ſich aber die Stundenwinkel davon beſtändig ändern, ſo haben ſie die Unbequemlichkeit, daß man entweder einen Calender dabey anbringen, oder den Zeiger beweglich machen muß, und auch in dem letztern Fall wird der Calender dabey nothwendig. Man hat daher dieſen vorgezogen, und die Azimuthaluhr dergeſtallt zeichnen gelehrt, daß die Stunden in der Ellipſe ADBE herum liegen, der Zeiger aber auf der Linie G g, als der kürzern Axe der Ellipſe, hin und her geſchoben wird. Die Methode, ſowohl die Ellipſe als den Calender in G g zu zeichnen, findet ſich in mehreren gnomoniſchen Schriften. Sie wird aber darin nur als eine Azimuthalſonnenuhr beſchrieben, und weder durch die Eigenſchaften der Ellipſe kenntlicher, noch durch andere dabey mit vorkommende Umſtände, brauchbarer gemacht. Hierin beſteht nun meine Nachleſe, und die Zeichnung der Uhr wird ſich folgender maſſen angeben laſſen:

Fig. I.

§. 5.

§. 5

Machet den Winkel DFC ſo groß als die Polhöhe des Ortes, für welchen die Uhr dienen ſolle, und nachdem ihr DF willkührlich angenommen, ſo ziehet DC aus D auf FC ſenkrecht. Traget DF aus C in A und B, und machet CE = CD, ſo iſt AB die gröſſere, DE die kleinere Axe, und F der Brennpunct der Ellipſe ADBE. Traget CF in Cf, ſo iſt f der andere Brennpunct. Machet ferner jeden Winkel GfC der Declination der Sonne gleich, ſo wird ſich auf Gg der Thierkreis oder der Calender zeichnen laſſen. Endlich machet jeden Winkel DCK dem Stundenwinkel, und CK der halben Axe CB gleich, und fället aus K die Perpendiculair KP auf AB, ſo wird H der Punct ſeyn, wo die Stunde muß hingeſchrieben werden. Und wenn die Declination der Sonne = GfC iſt, ſo iſt DGH das Azimuth der Sonne zu der Stunde H. DE iſt die Mittagslinie, D liegt gegen Mitternacht, und der Zeiger wird in G aufgerichtet. Ferner iſt für eben den Tag jede Linie GH allemale dem Coſinus der Sonnenhöhe gleich, und wird aus G die Normallinie GL auf die Ellipſe gezogen, ſo zeigt ſie die Stunde des Aufganges der Sonne, ſo wie die andere Normallinie Gl die Stunde des Niederganges bezeichnet, und zugleich der Halbmeſſer des Circuls iſt, auf welchem GH den Coſinus der der Sonnenhöhe giebt. Auf eben dieſem Circul

cul iſt C K der Coſinus der Declination der Sonne.

§. 6.

Der Beweis von allen dieſen Sätzen wird nicht ſchwer, wenn man ſich die ganze Figur als eine ortographiſche Projection der Sphäre vorſtellt. Man fälle nemlich aus jeden Puncten des Parallelkreiſes der Sonne, Perpendiculairen auf die Fläche des Horizontes, ſo bezeichnen dieſe die Ellispſe ADBE. Der Diameter AB behält ſeine Länge, welche den doppelten Coſinus der Declination gleich iſt. Hingegen wird DE in Verhälniß des Halbmeſſers zum Sinus der Polhöhe verkürzt. Und dieſes iſt der Grund, warum der der Polhöhe gleich gemachte Winkel DFC in den Brennpunct F trift. Denn FD iſt in der Ellipſe allemal $=$ AC $=$ CB, und ſo wird hier CB: CD $=$ FD : CD $=$ 1 : ſin. eleu. poli. Fällt man ferner aus dem Scheitelpunt der Sphäre eine Perpendiculairlinie auf den Horizont, ſo trift dieſe in G. Hingegen iſt C die Projection desjenigen Punctes der Weltaxe, welcher in der Fläche des Parallelkreiſes der Sonne liegt, und von dem Mittelpunct der Sphäre um den Sinus der Declination entfernt iſt. Da dieſer Mittelpunct in G fällt, ſo iſt GC die Projection von dieſem Sinus der Declination, und wegen der ſchiefen Lage der Weltaxe im Verhältniß des Halbmeſſers zum Coſinus der

Polhö-

Polhöhe verkürzt. GH iſt für jede Stunde die Projection des Sinus des Abſtandes der Sonne vom Scheitelpunct, und folglich des Coſinus der Sonnenhöhe. Dieſe Linie hat in der Lage GL, Gl ihre beyden Maxima; und L, l ſind die Projection der Puncte, wo der Parallelkreis der Sonne den Horizont durchſchneidet. Nimmt man demnach GL = 1 an, ſo iſt CB der Coſinus der Declination, CF = Cf im Verhältniß des Coſinus der Polhöhe kleiner, und CG in Verhältniß der Tangente der Declination kleiner als CF, folglich in zuſammengeſetzter Verhältniß der Tangente und des Coſinus der Declination und des Coſinus der Polhöhe kleiner als CL = 1, demnach in Verhältniß des Sinus der Declination und des Coſinus der Polhöhe. Hieraus ergiebt ſich, warum der Calender in G g aus dem Brennpunct f kann verzeichnet werden. Endlich iſt CP allemal die Projection des Sinus des Stunden-Bogens, welcher, wenn CK = CB als Halbmeſſer angenommen wird, dem Winkel DCK gleich wird.

§. 7.

Die erſt angegebene Verzeichnung der Azimuthaluhren hat für diejenigen, welche die Ellipſen aus der höhern Geometrie kennen, etwas geſchmeidiges, wodurch ſie faßlicher wird. Der Gebrauch des Brennpuncts wird dadurch merkwürdig, daß er ſowohl die Polhöhe DFC

als

als die Declination der Sonne G f C, und damit den auf G g gezeichneten Calender beſtimmen hilft. Es iſt ferners merkwürdig, daß die aus jedem Punct G auf die Ellipſe gezogene Normallinien G L, G l die Stunde des Auf- und Unterganges der Sonne angeben. Es iſt unnöthig hier mit anzumerken, daß die Puncte L, F, G, f, l ſämtlich in dem Umkreiſe eines Circuls liegen, weil dieſes aus dem, daß G L, G l Normallinien ſind, für ſich folgt. Da man aber, um dieſen Circul zu ziehen, nur drey Puncte nöthig hat, ſo kann man die Puncte L, l beſtimmen, wenn man den Circul durch f, G, F zieht; und hinwiederum wird G beſtimmt, wenn der Circul durch L, F, G gezogen wird. Im erſten Fall findet man aus der Declination die Länge des Tages L A D B L, im andern aus der Länge des Tages die Declination. Endlich iſt hiebey merkwürdig, daß dieſe Azimuthaluhr, vermittelſt der Linie G H, nicht nur die Stunde H, und ihr Azimuth D G H angiebt, ſondern ihre Länge ſelbſt den Coſinus der Sonnenhöhe vorſtellt, wenn G L zum Halbmeſſer angenommen wird.

§. 8.

Es kömmt aber bey dieſer Azimuthaluhr noch ein anderer Umſtand vor, welcher unerwarteter iſt. Man darf nemlich nur ſetzen, daß A C die Mittagslinie ſey, und über derſelben einen Zeiger aus C aufrichten, welcher mit

derſelben

derſelben einen Winkel mache, der der Polhöhe DFC gleich ſey, ſo wird, wenn man in A 12 Uhr ſchreibt, und ſo die Stunden ändert, die Uhr eine Horizontaluhr für eben die Polhöhe ſeyn, für welche ſie vorhin eine Azimuthaluhr war. Denn bey den Horizontaluhren ſind die Tangenten der Stundenwinkel in der Verhältniß des Halbmeſſers zum Sinus der Polhöhe kleiner als die Tangenten der Stundenbögen. Es ſey demnach jeder Stundenbogen = KCB, ſeine Tangente = KP, wenn man nemlich CP als einen Halbmeſſer anſieht. Da nun PH in der Verhältniß von FD zu CD, oder des Halbmeſſers zum Sinus der Polhöhe kleiner iſt als PK, ſo iſt PH die Tangente des Stundenwinkels der Horizontaluhr, und folglich HCB der Stundenwinkel ſelbſt.

§. 9.

Ungeachtet aber die Ellipſe ADBE eben ſo wohl zu einer Azimuthaluhr als zu einer Horizontaluhr gebraucht werden kann; ſo macht dennoch die verſchiedene Lage der Mittagslinie, als welche im erſten Fall die kürzere, im andern Fall aber die längere Axe iſt, daß man ſie nicht zugleich zu beyden Abſichten gebrauchen kann, wenn man ſich des Schattens beyder Zeiger bedienen will. Will man aber an dem Zeiger der Azimuthaluhr, welcher auf der Linie Gg ſenkrecht ſteht, einen gleichfalls aufrechtſtehenden Spiegel befeſtigen, ſo, daß derſelbe mit beyden

Axen der Ellipſe einen Winkel von 45 Graden mache, ſo wird der, vermittelſt des Spiegels, reflectirte Schatten des Azimuthalzeigers, die Stunden von D an gerechnet, eben ſo zeigen, wie der auf C B ſtehende Zeiger der Horizontaluhr die Stunde, von B an gerechnet, weiſen wird, wenn die längere Axe in der Mittagslinie liegt. In jeder andern Lage treffen beyde Stunden nicht zuſammen. Man hat ſich auch dieſes Umſtandes längſt ſchon bedient, um durch die Vereinigung der Azimuthal- und Horizontaluhren die Lage der Mittagslinien zu finden, dabey aber jede Uhr beſonders verzeichnet. Läßt ſich aber der Spiegel gut anbringen, ſo gebraucht es, nach der hier angegebenen Methode, dieſer gedoppelten Zeichnung nicht, weil man bey der Ellipſe A D B E bleiben, und ſchlechthin nur die Zahlen, ſowohl von D als von B an gerechnet, herum ſchreiben darf.

II. Beſtimmung des Azimuth durch die Höhe der Sonne.

§. 10.

In den Anweiſungen zur Gnomonic begnügt man ſich mehrentheils die Verfertigung der Sonnen-Uhren, und etwann auch der Mond- und Sternuhren anzugeben, das will ſagen, man macht die Beſtimmung der Zeit darin zur Hauptabſicht; und dieſes hat

hat allerdings ſeine gute Gründe, weil man den übrigen Umſtänden ſeltener als der Zeit nachfragt. Indeſſen hat die Beſtimmung des Azimuth, und folglich der Mittagslinie, noch genug Erhebliches, daß man die dazu dienlichen Mittel vervielfältigen ſollte. In der Gnomonic ſelbſt kömmt die Frage von Beſtimmung der Mittagslinien bey den meiſten Sonnenuhren vor. In der practiſchen Geometrie kann ſie ebenfalls ſehr gute Dienſte leiſten; und bey der Schiffahrt wird ſie unentbehrlich. Da das Azimuth am unmittelbarſten aus der Höhe der Sonne gefunden wird, ſo werde ich einige darüber angeſtellte Unterſuchungen hier mit anbringen.

§. 11.

Es iſt unnöthig aus dem vorhingeſagten zu wiederholen, daß die erſtbeſchriebene Azimuthaluhr dazu dienen kann, ſofern man GL, als den Sinus totus, und GH als den Coſinus der Sonnenhöhe anſieht, (§. 5.) und ſofern Gl, GL das Azimuth der auf- und untergehenden Sonne iſt. Es iſt vielmehr die Frage, das Azimuth unmittelbar auf den Quadranten zu verzeichnen, mit welchem die Höhe der Sonne gemeſſen wird. Dazu dienen nun folgende Betrachtungen:

§. 12.

Es ſey HZON der Mittagskreiß, HCO der Horizont, GCF der Aequator, KSI Fig. II.

Digitized by Google

ein Parallelkreiß des Aequators, S der Ort der Sonne, SZ ihr Abſtand vom Zenith, SP ihr Abſtand vom Pole, SPZ der Stunden-Winkel, SZI der Azimuthalwinkel. Man ſetze:

$$PZ = e$$
$$PS = c$$
$$ZS = k$$
$$PZS = a$$

ſo giebt die Trigonometrie folgende Gleichung:

$$\cos c = \cos e . \cos k + \sin e . \sin k . \cos a$$

oder wenn man durch ſin. k dividirt

$$\cos c . \operatorname{cosec} k = \cos e . \cot k + \sin e . \cos a.$$

§. 13.

Fig. III. Da wir den ſphähriſchen Triangel PSZ in einen geradlinichten verwandeln, in welchem e ein Winkel werde, ſo ſeyn in dem geradlinichten Triangel $\alpha \, \varepsilon \, \beta$ vier auf einander folgende Stücke, nemlich die Winkel δ, ε und die Seiten α, β; ſo wird die Verhältniß dieſer vier Stücke durch die Gleichung

$$\alpha \operatorname{cosec} \varepsilon = \beta . \cot \varepsilon + \beta . \cot \delta$$

ausgedrückt. Wird dieſe Gleichung mit der letztern des vorhergehenden §. verglichen, ſo läßt ſich

$$\operatorname{cosec} \varepsilon = \operatorname{cosec} k$$
$$\cot \varepsilon = \cot k$$

demnach

$$\varepsilon = k$$

ſetzen.

Digitized by Google

ſetzen. Dadurch aber wird

$$\alpha = \text{coſ}\, c$$

$$\beta = \text{coſ}\, e$$

und da nun nur noch

$$\beta \cot \delta = \sin e . \text{coſ}\, a$$

bleibt, ſo findet ſich

$$\cot \delta = \frac{\sin e . \text{coſ}\, a}{\beta} = \text{tang}\, e . \text{coſ}\, a$$

Und auf dieſe Art ſind die vier Stücke $\varepsilon, \alpha, \beta, \delta$ des geradlinichten Triangels durch die vier Stücke k, c, e, a des ſphäriſchen Triangels dergeſtalt beſtimmt, daß die Seite k des letztern im erſtern der Winkel ε wird. Es iſt demnach in dem geradlinichten Triangel der Winkel ε das Complement der Sonnenhöhe, die Seite β der Sinus der Polhöhe, die Seite α der Sinus der Declination. Und da

$$\cot \delta = \text{tang}\, e . \text{coſ}\, a$$

iſt, ſo ergiebt ſich hieraus, daß der Winkel δ dem Bogen NL gleich iſt. Denn der Triangel LGN iſt in G rechtwinklicht, und

$$GN = 90° - e$$

$$GNL = a$$

demnach

$$\text{coſ}\, a = \cot e . \cot NL = \cot e . \cot \delta$$

$$d = NL.$$

§. 14.

Wir führen dieſen letztern Umſtand nur an, um zu zeigen, daß der Winkel δ auch auf der

Sphäre eine Bedeutung hat. Es iſt aber zu unſerm Vorhaben genug, wenn wir aus der Gleichung

$$\cot \delta = \text{tang } e \,.\, \text{coſ } a$$

die Anmerkung ziehen, daß ſich der Winkel δ ſchlechthin nach dem Azimuth a verändert, und daher beſtändig iſt, ſo lange man bey einerley Azimuth bleibt. Da nun die demſelben gegenüberſtehende Seite β = coſ e durchaus beſtändig iſt, ſo wird der Punct δ allemal in dem Umkreiſe des Circuls $\varepsilon\,\delta\,\gamma$ liegen, und auf dieſe Art wird α durch ε, oder hinwiederum ε durch α beſtimmt. Es iſt demnach nur die Frage, dieſen Circul für jedes Azimuth zu beſtimmen. Dieſes wird nun am leichteſten geſchehen, wenn wir den Winkel ε rechtwinklicht nehmen.

§. 15.

Fig. IV. Es ſey demnach AC zu AB wie der Sinus totus zur Tangente e, und A ein rechter Winkel. Ferner ſey für jedes Azimuth

$$AB : AD = 1 : \text{coſ } a$$

ſo wird

$$AC : AD = 1 : \text{tang } e \,.\, \text{coſ } a = 1 : \cot \delta$$

demnach

$$\delta = CDA$$

ſeyn. Man halbire DC in E, und aus E beſchreibe man mit dem Halbmeſſer ED den Bogen ADC, ſo iſt dieſes der für das Azimuth a geſuchte Bogen. Nimmt man nun jedes Azimuth

muth von 10 zu 10 Graden, ſo werden die denſelben entſprechende Bögen auf eben die Art beſchrieben, wie ſie die Figur vorſtellt. Zieht man durch E eine Parallele HEG mit AB, ſo liegen alle Mittelpuncte auf HG, und es iſt für jedes Azimuth

$$HF : EF = 1 : \cos a.$$

§. 16.

In dieſer Figur iſt nun

$$AC = 6 = \cos e$$

folglich

$$CB = CM = \sin. tot.$$

ferner jede Linie

$$Cd = \cos c = \alpha$$

$$dCA = k$$

$$dCK = 90° - k$$

und der Circul ADdC zeigt das dazu gehörige Azimuth an.

§. 17.

Daferne das auf dieſe Art zu verfertigende Inſtrument nur für die Sonnenhöhen und deren Azimuthe dienen ſolle, ſo gebraucht man nicht die gantze Figur, ſondern man macht CL dem Sinus der größten Declination der Sonne gleich; und indem man aus C den Bogen Ll beſchreibt, ſo iſt der Theil LlC alles, was man von der Figur gebraucht. Auf CL werden aus C die Sinus der Declination für jede Grade der Ecliptic getragen, und mit

L l concentriſche Bögen aus C beſchrieben. Wo nun dieſe Declinationsbögen die Azimuthalbögen durchſchneiden, da ergiebt ſich zugleich die dazu gehörende Höhe der Sonne durch den Winkel, den die aus C in dieſe Durchſchnittspuncte gezogenen Linien mit CK machen. Die fünfte Figur ſtellt einen ſolchen für die Grade der Ecliptic verzeichneten Azimuthalquadranten gröſſer und deutlicher vor, und die Verzeichnung auf eine bloß practiſche Art vorgetragen, iſt folgende.

§. 18.

Fig. V. Nach einer beliebig angenommenen Scale mache man CF dem halben Sinus der Polhöhe, FH dem halben Coſinus derſelben gleich und den Winkel F von 90 Graden. Sodann ſehe man FH als einen Halbmeſſer an, und trage auf denſelben aus F gegen H und G alle Sinus des Azimuth, von Grad zu Grad, oder von 5 zu 5, oder, wie es in der Figur geſchehen, von 10 zu 10 Graden, ſo hat man eben ſo viele Mittelpuncte, aus welchen man durch C eben ſo viele Circulbogen zieht, und auf dieſelbe die Grade des Azimuth von Mittag und von Mitternacht an gerechnet, zeichnet. Der Winkel HCN wird von 90 Graden gemacht, und ſo erhält man NCL die gantze Oefnung, ſo der Quadrant haben muß. Ferner mache man CL dem Sinus der gröſten Declination der Sonnen gleich, und beſchreibe aus

aus C den äuſſerſten Bogen LKN, welcher ſodann in Grade getheilet wird, die von K aus vor- und rückwärts gezählet werden, ſo, daß der 90ſte Grad in L falle. Sodann werden auf CL aus C die Sinus der Declination von allen Graden der Ecliptic aufgetragen, oder welches einerley iſt, man ſieht CL als einen Halbmeſſer an, und trägt alle Sinus darauf, oder man fällt aus jeden Grade des Bogens LK Perpendicularen auf CL, und ſchreibt die nördliche Zeichen des Thierkreyſes da, wo die Sinus ihrer Declination hinfallen. Auf CN werden auf gleiche Art die ſüdlichen Zeichen geſchrieben. Die Dioptern werden auf CL angemacht, ſo, daß für die nördliche Zeichen C, für die ſüdlichen L gegen die Sonne gerichtet wird. Den in C angemachten Faden CP mit dem Gleichgewichte P und der daran beweglichen Perle p, läßt man frey herunter hängen, nachdem man denſelben anfangs auf CL, oder CN gelegt, um die Perl auf den Ort der Sonne zu ſchieben. Auf dieſe Art wird z. E. wenn die Sonne im 23ſten Grad ♉, oder 7 Grad ♌ und 20 Grad hoch iſt, die Perl in p ſeyn, und den 95ſten Grad des Azimuth, von Mittag an gerechnet, oder auf den 85ſten Grad von Mitternacht an gerechnet, anzeigen. Wäre bey gleicher Höhe der Sonne eben die Declination ſüdlich, ſo würde die Perl in q auf den 21ſten Grad von Mittag, oder auf den 159ſten Gr. von Mitternacht an gerechnet,

fallen. Will man aber den Quadranten feſte ſtellen, und die Dioptern anſtatt des Fadens, auf ein bewegliches Lineal bringen, ſo muß CK immer horizontal liegen, und die auf CL, CN geſchriebene Grade und Zeichen werden auf das Lineal gezeichnet.

§. 19.

Wer leicht einige gnomoniſche Schriften geleſen hat, wird ohne Mühe auf die Anmerkung fallen, daß man långſt ſchon einen Quadranten von dieſer Art geſucht hat, auf welchem die hier verzeichneten Azimuthalbögen, Stundenbögen wåren, und zwar mit dem Bedinge, daß es Circulbögen blieben. Denn wenn man andere krumme Linien dazu gebrauchen will, ſo laſſen ſich unzählige dergleichen verzeichnen. Man findet auch hin und wieder ſolche Quadranten beſchrieben, wo man mit Hindanſetzung der geometriſchen Schårfe Circulbögen dazu gebraucht. Mit geometriſcher Schårfe läßt ſich eben dieſer Azimuthalquadrant dazu gebrauchen, wenn man die Declination und die Sonnenhöhe verwechſelt. Man nimmt nemlich die Declination auf dem Bogen KL, oder KN, und den Sinus der Sonnenhöhe auf CL, oder CN, und verwandelt die Grade des Azimuth, ſo die Perl anzeigt, in Stunden, indem man ſie durch 15 theilt. So z. E. wenn man ſetzt, die Declination ſey 20 Grad nördlich, die Sonnenhöhe $18\frac{1}{2}$ Grad, ſo wird die

Perl,

Digitized by Google

Perl, wie vorhin, in p ſeyn, und von Mittag an gerechnet 95 Grad, oder, durch 15 getheilt, 6 St. 20 Min. angeben, welches Nachmittags-Stunden ſind. Theilt man aber die von Mitternacht an gerechnete 85 Grad durch 15, ſo erhält man 5 St. 40 Min. welches Vormittags-Stunden ſind.

§. 20.

Der Grund, warum dieſe Verwechſelung angeht, iſt, weil man in beyden Fällen in dem Triangel PZS drey Seiten und einen Winkel hat. Der Quadrant iſt für den Azimuthalwinkel Z conſtruirt. Will man ſtatt deſſen den Stundenwinkel P nehmen, ſo ſteht dieſem nicht mehr die Seite PS, ſondern die Seite ZS gegenüber. Demnach müſſen dieſe Seiten verwechſelt werden. Da die Seite PZ an beyden Winkeln liegt, ſo bleibt ſie in beyden Fällen unverändert. Da übrigens die Scale CL nur bis auf $23\frac{1}{2}$ Grad geht, ſo ſieht man leicht, daß ſie nicht für alle Sonnenhöhen dient, und daß man folglich dieſelbe bis auf den Sinus der gröſten Sonnenhöhe verlängern müſſe. Fig. II. Fig. V.

§. 21.

Ich werde mich aber dabey nicht länger aufhalten, ſondern vielmehr die Anmerkung machen, daß alle die gnomoniſche Inſtrumente, wobey das, was man ſucht, auf einer ganzen Fläche

Fläche herum getragen und geſucht werden muß, auf eine ſolche Art ins weitläuftige fallen, daß man, ſo ſinnreich ſie auch ausgeſonnen ſind, ſtatt derſelben, mit gutem Grunde, einfachere wünſchen kan. So z. E. fällt das Geſchmei-
Fig. I. dige der Azimuthaluhr der erſten Figur in die Augen. Die Stunden liegen auf einer einigen Linie herum, und der Zeiger wird auch nur auf der Linie Gg, als auf einer ganz einfachen Scale auf den Ort der Sonne geſtellt. Ich habe daher auf Mittel gedacht, bey den Quadranten eben ſolche Abkürzungen und Geſchmeidigkeiten zu erhalten, und werde nun das, ſo ich für das Azimuth gefunden, folgender maſſen vortragen.

§. 22.

Fig. II. Da die Sonnenhöhe, deren Complement der Bogen ZS iſt, auf dem Quadranten durch einen Winkel vorgeſtellt und gemeſſen wird, ſo habe ich nach den bekannten trigonometriſchen Regeln den Triangel E C A genommen, deſſen drey Seiten ihre Pole in den Ecken P, Z, S haben. Hier iſt nun

ECA die Höhe des Aequators $= e$
CEA das Complement der Sonnenhöhe $= k$
CAM das Complement der Declination $= c$
EC das Complement des Azimuth $= 180° - a$
CA der Stundenbogen $=$ SPZ.

Nun war es die Frage, den Triangel AEC dergeſtalt zu proiiciren, daß das Auge in dem

Nadir

Nadir des Puncts E und die Tafel auf der aus dem Auge in E gezogenen Linien ſenkrecht war. Man weiß, daß auf dieſe Art die Bögen EC, EA durch gerade Linien vorgeſtellt werden, deren Länge den Tangenten der Hälfte dieſer Bögen gleich iſt, daß der Winkel E bleibt, und AC durch einen Circulbogen vorgeſtellt wird, welcher die Linien EC, EA unter den Winkeln A, C ſchneidet.

§. 23.

Man mache demnach den Winkel

Fig. VI.

$$AEC = k$$
$$EC = \text{tang } \tfrac{1}{2} a$$
$$EQ = \text{cot } a$$
$$CQR = 90 \text{ Gr.}$$
$$QCR = 90 - c$$

aus R beſchreibe man den Bogen CAM, ſo wird der Winkel

$$ACE = e$$
$$MAE = c$$

und EAE der Declination der Sonne gleich ſeyn.

§. 24.

Nun iſt

$$QC = \text{cot } a + \text{tang } \tfrac{1}{2} a = \text{coſec } a$$

demnach

$$QE : QC = \text{cot } a : \text{coſec } a = \text{coſin } a$$

Nimmt man folglich QC und damit den ganzen Triangel QCR und den Bogen CM als beſtän-

beſtändig an, und betrachtet Q C als einen Halbmeſſer, ſo iſt Q E der Coſinus des Azimuth, und auf dieſe Art können die Azimuthe auf die Linie Q C getragen werden. Da der Winkel A E C = k dem Abſtand der Sonne vom Scheitelpunct gleich iſt, ſo bleibt Q C in allen Fällen vertical, und A E iſt immer nach der Sonne gerichtet, und ſchneidet auf E C die Grade des Azimuth ab. Macht man demnach in R ein bewegliches Lineal A R, und auf denſelben in A ein ander bewegliches Lineal A E mit Diogtern an, ſo muß der Winkel E A R immer der Declination der Sonne gleich gemacht, und ſo befeſtigt werden. Sodann dreht man den ganzen Winkel oder die beyden Lineale E A R bis A E gegen die Sonne gerichtet iſt, ſo wird A E das Azimuth in E auf der Scale C Q abſchneiden.

§. 25.

Nach dieſer Anleitung läßt ſich das Inſtrument aus zween Sectoren ſo verfertigen, wie
Fig. VII. es die 7te Figur vorſtellt. Der erſte Sector N R C M hat einen Bogen N M C, welcher doppelt ſo groß als die Höhe des Aequators iſt. Die Chorde dieſes Bogens N Q C wird als ein Diameter angeſehen, und die Sinus verſus jeder Graden aus C gegen N getragen, und die Grade dazu hingezeichnet, welche ſodann jede Azimuthe, von Mittag an gerechnet, vorſtellen. Der andere Sector R D A F hat einen

Bogen,

Bogen, der doppelt ſo groß als die Obliquität der Ecliptic iſt. Die Linie AR theilt denſelben in zween gleiche Theile, und iſt von gleicher Länge wie der Halbmeſſer des erſten Sectors. A iſt der Mittelpunct, aus welchem die Bögen D F beſchrieben, und auf welche die Grade der Declination aufgetragen werden. Dieſer zweyte Sector dreht ſich in R um das Centrum des erſtern, hingegen wird in ſeinem Centro A das Lineal A B angemacht, und mit Dioptern verſehen, welche mit der Linie AB parallel ſind.

§. 26.

Solte nun damit das Azimuth der Sonne gefunden werden, ſo wird das Inſtrument in die Verticalfläche der Sonne geſtellt, ſo, daß die Chorde N C vertical ſtehe. Das Lineal AB wird in B auf den Grad der Ecliptic gedreht, in welchem die Sonne iſt. Sodann dreht man den Sector ADRF bis die Diopter gegen die Sonne gerichtet ſind, ſo wird die Schärfe des Lineals A B auf der Chorde NQC das Azimuth der Sonne abſchneiden, die Höhe der Sonne ſelbſt aber wird MRA + BAR ſeyn.

§. 27.

Man thut hiebey wohl, wenn man den Sector DAFR etwas gröſſer als 47 Grad macht, damit, wenn das Lineal AB auf 0 ♋

liegt,

liegt, es ſich nicht an dem Arm AD ſo anſchlieſſe, daß der Grad des Azimuth auf NQC, den es anzeigen ſolle, ganz bedeckt werde. Aus gleichem Grunde iſt es gut, wenn man das Gewinde A nicht ſehr groß macht, damit es, wenn A nahe an C kömmt, die Grade auf CQ nicht bedecke. Uebrigens da dieſes nur um die Mittagszeit geſchieht, wo ohnehin das Azimuth nicht ſehr genau durch die Sonnenhöhe beſtimmt werden kann, ſo hat es auch nichts auf ſich, wenn gleich die 20 oder 30 erſte Grade bedeckt werden, da es an ſich rathſamer iſt, daß man ſie nie gebrauche, daß will ſagen, das Azimuth Morgens früher, Nachmittags ſpäter zu beſtimmen ſuche. Da endlich das Gewind A nie höher gegen R hinauf zu ſtehen kömmt, als bis dahin, wo der Arm AD horizontal liegt, ſo kann man von dem Sector CMNR den Theil, der noch höher iſt, weglaſſen, und ſo wird er von nicht mehrern Graden ſeyn, als die gröſte Sonnenhöhe; dabey aber bleibt die Chorde und ihre Eintheilung und Lage eben ſo, als wenn man den Sector ganz beybehielte. Es iſt faſt unnöthig zu erinnern, daß man an dem Gewinde A einen Stift befeſtigen kann, welcher auf einem um NMC herum beſchriebenen concentriſchen Bogen, Grade anzeige. Dieſe mögen dienen, den Sector ADRF, nach geſchehener Obſervation, um ſo viel hinauf zu drehen, als die Refraction beträgt, wenn das Inſtrument

groß

Digitized by Google

groß genug iſt, daß man bey kleinern Sonnenhöhen derſelben, darauf Rechnung tragen kann.

III. Sector, um aus der Sonnenhöhe die Zeit zu beſtimmen.

§. 28.

Das erſt beſchriebene Azimuthalinſtrument hat nun den vorhin (§. 21.) verlangten Vortheil der einfachen und bloß linearen Scalen, und iſt überdies ſehr leicht und ohne weitläuftige Vorbereitung zu gebrauchen. Ueberdies kommt der Umſtand dabey vor, daß die Ungleichheit der Grade auf der Chorde NQC gleichſam der Maaßſtab von der Zuverläßigkeit der Obſervation angiebt, weil dieſe nur ſo weit geht, als die Theile, welche ſich in jedem Fall auf NC noch unterſcheiden laſſen. Ich habe daher geſucht, ob dieſe Vortheile auch bey einem Sector erhalten werden könnten, welcher anſtatt des Azimuth die Stunden angeben würde.

§. 29.

Zu dieſem Ende kehrte ich zu dem Triangel ECA zurücke (§. 22.) wobey nunmehr Fig. II.

$$ECA = e$$
$$CEA = k$$
$$CAM = c$$
$$AC = SPZ = \omega$$

zu betrachten vorkömmt. Dieſen proiicirte ich ſo, daß das Aug im Nadir des Eckes A und
Fig. VIII. die Tafel auf der aus dem Auge durch A gehenden Linien ſenkrecht war. Es ſey demnach

$$MAC = c$$
$$AC = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\omega$$
$$AQ = \cot\omega$$
$$AQR = 90\ \text{Grad}$$
$$RCQ = 90 - e$$

ſo wird, wenn man aus R den Bogen CN beſchreibt, der Winkel

$$ECA = e$$
$$AEC = k$$

demnach AER die Höhe der Sonne ſeyn. Zieht man ferner RM auf EAM, und KR auf RQ ſenkrecht, ſo iſt

$$KRM = 90^\circ - MAC = 90 - c$$

folglich KRM der Declination der Sonne gleich, und

$$MRE = 90^\circ - MER = k$$

demnach wenn RM vertical iſt, ſo iſt RE gegen die Sonne gerichtet, weil MRE ihrem Abſtand vom Scheitelpunct gleich iſt. Endlich haben wir

$$QC = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\omega + \cot\omega = \text{coſec}\,\omega$$
$$QA : QC = \cot\omega : \text{coſec}\,\omega = \text{coſin}\,\omega$$

Wird daher CQ und damit der ganze Triangel CRQ und der Bogen CN als beſtändig genommen, und CQ als ein Halbmeſſer angeſehen, ſo iſt AQ der Coſinus des Stunden-

bogens

bogens ω, und auf dieſe Art laſſen ſich auf QC die Stunden zeichnen, wenn man ſie dahin zeichnet, wo die Coſinus ihrer Bögen hintreffen.

§. 30.

Will man demnach aus dieſer Figur ein Inſtrument machen, ſo muß Fig. IX.

KRM die Declination der Sonne
RM vertical
ER gegen die Sonne gerichtet
EA horizonthal

ſeyn. Dieſes kann nun auf folgende Art erhalten werden.

§. 31.

An dem Sector HCLNR wird der Bogen CL = LN der Höhe des Aequators gleich gemacht, die Chorde CQN gezogen, und indem man ſie als einen Diameter anſieht, ſo trägt man die Sinus verſus der Stundenbögen aus C gegen N darauf, um die Stunden und Minuten darauf zu verzeichnen. Von L in K zählt man 90 Grade, und trägt aus K vor- und rückwerts die Declination jeder Grade der Ecliptic, um die Zeichen des Thierkreiſes darauf zu zeichnen. In dem Centro R wird ein bewegliches Lineal RA angemacht und mit Dioptern verſehen. In E aber wird ein Winkelhacken ABD angehenkt, ſo, daß durch die Schwere des Gewichtes D die Schärfe des Lineals AB allemal in eine horizontale Lage kom-

komme. Endlich hängt aus R der Faden R M mit dem Gewichte M herunter.

§. 32.

Soll nun die Stunde gefunden werden, ſo wird der Sector in die Verticalfläche der Sonne geſtellt, ſo, daß der Faden R M auf den Ort der Sonne falle. Sodann richtet man die Dioptern E N gegen den Mittelpunct der Sonne, und läßt den Winkelhacken A D B frey hangen und ſich in Ruhe ſetzen. Dieſer wird ſodann in A die Stunde und Minute anzeigen.

§. 33.

Man kann dieſen Sector mit Wegſchaffung des rechten Winkels K R L folgendermaſſen abändern und geſchmeidiger machen. Der Bogen N C bleibt wie vorhin der doppelten Höhe des Aequators gleich, und die Chorde N Q C wie eben ſo, in Stunden getheilt. Hingegen werden die Grade der Declination aus L vor- und rückwärts getragen. An dem Lineal R E läßt man aus E einen Faden E P mit dem Gewichte P herunter hangen, und die Dioptern F B werden in D rechtwinklicht an dem Lineal R E D befeſtigt.

Fig. X.

§. 34.

Um nun damit die Stunde zu finden, dreht man das Lineal R E D auf das Zeichen und Grad der Ecliptic, in welchem die Sonne iſt,

 und

Digitized by Google

und wendet ſodann den ganzen Sector ſo, daß das Lineal eine verticale Lage bekomme, oder der Faden E P auf E R treffe, oder, welches einerley iſt, der Ort der Sonne in M vertical über R ſey. Sodann dreht man das Lineal, um die Dioptern BF gegen die Sonne zu richten, und läßt den Faden frey hangen und ſich in Ruhe ſetzen, ſo wird derſelbe in A die Stunde und Minuten weiſen, die zu finden war.

IV. Methode dieſe Sectoren für jede Polhöhe univerſal zu machen.

§. 35.

Die erſt beſchriebene Sectoren, wodurch vermittelſt der Höhe der Sonne ſowohl das Azimuth als die Zeit gefunden wird, haben auſſer der einfachen und blos linearen Scale noch den Vortheil, daß ſie faſt, ohne weitere Zubereitung, für jede Polhöhen allgemein gemacht werden können. Die Möglichkeit dieſes beträchtlichen Vortheils rührt daher, daß die Eintheilung der Scale CN für jede Polhöhen einerley iſt, und daß ſich ſchlechthin nur der Winkel QRC ändert, als welcher allemal der Höhe des Aequators gleich gemacht werden muß. Setzt man demnach QCN beſtändig, ſo wird QR deſto länger, je gröſſer die Tangente der Polhöhe QCR iſt, und aus gleichem Grunde verlängert ſich CR = ER in Ver-

hältniß der Secante der Polhöhe. Dieſes fordert demnach, daß man auf der Linie RQ noch ein Lineal befeſtige, und auf demſelben die Tangente der Polhöhe aus R gegen Q trage, damit man die Scale CN, welche nunmehr beweglich gemacht werden muß, auf die Polhöhe ſchieben und befeſtigen könne. Eben ſo müſſen auch die Secanten der Polhöhe auf dem Lineale RE aufgetragen werden, um den Faden EP jedesmal da anzuhängen, wo die Polhöhe gezeichnet ſteht. Beyden Linealen RQ, RE giebt man die Länge, welche die gröſte Pohlhöhe erfordert, wo man zu obſerviren gedenkt; und anſtatt dem Inſtrumente die Figur eines Sectors zu geben, kann man es in ein Rectangel verwandeln, deſſen Breite = CN, die Länge aber der Secante der gröſten Polhöhe gleich iſt, für welche man es zu gebrauchen gedenkt.

§. 36.

Auf dieſe Art verwandelt wird nun das Inſtrument in der 11. Figur vorgeſtellt, wie es vom Aequator bis unter dem Polarcircul gebraucht werden kann. Die Stundenleiter NC läßt ſich an den beyden Rahmen HN, GC ſchieben und bey jeder Polhöhe befeſtigen. Auf NC ſind die Stunden nach den Sinus verſus der Stundenbögen, auf HN und GC die Tangenten der Polhöhen, und auf RED ihre Secanten aufgetragen. Auf dem Bogen M

Fig. XI.

finden

finden ſich die Zeichen und Grade des Thierkreiſes nach ihrer Declination. Die Dioptern F B ſind ebenfalls auf D R rechtwinklicht. Wird nun N C auf die Polhöhe geſchoben und befeſtigt, der Faden E P bey der Polhöhe E angeſchraubt, der Ort der Sonne M vertical über R geſtellt, und die Dioptern B F gegen die Sonne gerichtet, ſo ſchneidet der Faden in A die Stunde und Minuten ab. Die Verticallinie M R geht immer in K durch den Punct des Auf- und Unterganges der Sonne. K Q iſt der Sinus der Aſcenſionaldifferenz, Q A der Sinus des Stundenbogens, von 6 Uhr an gerechnet, K R E = R E A das Complement der Sonnenhöhe, R K A = K A E das Complement der Declination, und

$$RE : KA = \sin RKA : \sin KRE.$$

§. 37.

Alles dieſes geht nun bey dem vorhin (§. 25 ſeqq.) beſchriebenen Azimuthalſector auch an, und die Verwandlung fällt ſo aus, wie es die 12te Figur vorſtellt. Die Azimuthalſcale N C, welche nach den Sinus verſus des Azimuth eingetheilt iſt, läßt ſich an den beyden Rahmen H N, G C ſchieben, und bey der Polhöhe, die nach ihren Tangenten aufgetragen iſt, befeſtigen. Auf dem andern Sector D A F, ſind auf A R die Grade der Polhöhe nach ihren Secanten, und auf dem Bogen D F die Zeichen und Grade des Thierkreiſes Fig. XII.

 nach

nach ihrer Declination aufgetragen. Die Polhöhe fällt in R, und der Sector läßt ſich um dieſen Punct drehen, ſo wie die Dioptern AB ſich um ſein Centrum A drehen läßt. NC oder HG wird immer vertical geſtellt, und AB in B auf den Ort der Sonne gelegt, ſodann der ganze Sector DAF ſo gedreht, daß AB gegen die Sonne gerichtet ſey; und ſo wird die Schärfe AB auf NC den Grad des Azimuth, von Mittag an gerechnet, abſchneiden.

§. 38.

Die Genauigkeit dieſer Inſtrumente hängt fürnehmlich von der Länge der Scale NC ab, weil ſich auf derſelben deſto kleinere Theile noch unterſcheiden laſſen, je länger ſie gemacht wird. Iſt dieſe Länge von einem Fuß, oder 1440 Decimaltheile von Linien, ſo wird in Q eine Minute Zeit noch die Gröſſe von drey ſolcher Decimaltheile haben, oder beynahe $\frac{1}{3}$ Linie groß ſeyn. Von Q gegen C und N werden ſie immer kleiner. Es iſt dieſes aber kein Fehler des Inſtruments, weil ſich die Zeit aus der Sonnenhöhe deſto minder genau finden läßt, je näher die Sonne bey dem Mittage iſt. Man ſetze

Fig. X.

Fig. II.

$$PZ = e$$
$$ZS = k$$
$$PS = c$$
$$ZPS = \omega$$

ſo haben wir die Gleichung

$$\cos k = \cos e . \cos c + \sin e . \sin c . \cos \omega$$

Wird

Wird nun e, c beſtändig angenommen, und k, ω differentiirt, ſo iſt

$$\sin k . dk = \text{ſ}e . \text{ſ}c . \text{ſ}\omega . d\omega$$

folglich iſt

$$d\omega = \frac{\text{ſ}k}{\text{ſ}c . \text{ſ}e . \text{ſ}\omega} . dk$$

der Fehler in der Zeit, wenn d k der Fehler in der Höhe der Sonne iſt. Setzt man nun, die Höhe der Sonne werde mit dem Sector NEC gemeſſen, und CR ſey = 1, ſo iſt auf der Stundenleiter NC ein kleiner Theil der Zeit z. E. eine Minute deſto weniger zu erkennen, Fig. X.

1°. je kleiner QC = ſin e iſt,

2°. je ſchiefer der Faden EAP die Linie NC ſchneidet, folglich je kleiner ſin EAQ = ſin c iſt,

3. je mehr die Zeittheile in A kleiner ſind als in Q, folglich je kleiner ſin ω iſt.

Demnach wächſt aus dieſen Gründen die Schwürigkeit, einen kleinen Zeittheil auf NC zu erkennen, in zuſammengeſetzter Verhältniß von ſin c. ſin e. ſin ω. Dieſes iſt nun eben der Theiler der erſtgefundenen Formel

$$d\omega = \frac{\text{ſ}k}{\text{ſ}c . \text{ſ}e . \text{ſ}\omega} . dk$$

Der Zähler iſt

$$\text{ſ}k\, dk = -d\, \text{coſ}k . = d \sin MRD$$

und giebt folglich an, um wie viel der Perpendicul EP von der Verticale MR weggerückt wird, wenn man mit dem Inſtrument ſtatt

der wahren Sonnenhöhe eine gröſſere nimmt. Da die Möglichkeit dieſen Fehler zu erkennen, mit deſſen Gröſſe zunimmt, ſo nimmt die Schwürigkeit, denſelben zu erkennen, in umgekehrter Verhältniß ab, und dieſes macht, daß ſk.dk die übrige Factoren ſc.ſe ſω nicht multiplicirt, ſondern dadurch getheilt wird. Da wir demnach die Formel

$$d\omega = \frac{sk.dk}{sc.se.s\omega}$$

unmittelbar und ganz auf dem Inſtrumente finden, ſo ziehen wir die Folge daraus, daß es einerley iſt, ob man die Zeit in A obſervirt, oder ob man die Höhe der Sonne mit dem Sector CNR nimmt und daraus die Zeit berechnet.

§. 39.

Man muß ferner bey dieſen, und überhaupt bey allen gnomoniſchen Inſtrumenten, welche nach dem Ort der Sonne gerichtet werden müſſen, dieſen Ort genau wiſſen, und zwar nicht nur für die Mittagszeit, ſondern für die Stunde der Obſervation. Da man nun dieſe Stunde erſt durch das Inſtrument finden will, ſo kann man den Ort der Sonne anfangs ſo annehmen, wie derſelbe für die Mittagszeit aus den Aſtronomiſchen Tafeln berechnet wird, und damit ſehen, wie viel Uhr es ſeyn würde. Man ſucht ſodann den Ort der Sonne für dieſe Zeit, und ſtellt entweder die Obſervation aufs neue an,

an, oder giebt auch nur den Inſtrument die Lage, die es würde gehabt haben, wenn man gleich anfangs den wahren Ort der Sonne gebraucht hätte. So z. E. müſſen bey dieſer Veränderung die Diοptern B F unbeweglich bleiben, und nur der Sector N C R gedreht werden, bis der wahre Ort der Sonne in die Verticallinie M R trift. Uebrigens, wenn das Inſtrument groß genug iſt, daß ſich ſolche kleinere Veränderungen darauf bemerken laſſen, ſo muß man ebenfalls der Refraction Rechnung tragen, und dies geſchieht, wenn man nach geſchehener Obſervation die Dioptern ſo viel der horizontalen Lage näher rückt, als die Refraction beträgt.

V. Conſtructionen für die Sonnenhöhe.

§. 40.

Da bey dem erſtbeſchriebenen Sector der Winkel MRE der Höhe der Sonne, und E A Q den Abſtand der Sonne vom Pol gleich iſt, ſo darf man nur durch jede Zeit A eine Linie A E mit R M parallel ziehen, um die Höhe der Sonne E R M zu haben. Da nun M R allemal durch den Ort der Sonne M gezogen iſt, ſo wird die Höhe der Sonne für jeden Tag und Stunde ohne Mühe beſtimmt.

§. 41.

§. 41.

So leicht und allgemein nun dieſe Conſtruction iſt, ſo werde ich deſſen unerachtet noch eine andere herſetzen, welche zwar nicht ſo allgemein iſt, dabey aber dennoch etwas ſehr einfaches und leichtes an ſich hat. Man nimmt für den fürgegebenen Tag die Mittagshöhe und die Mitternachtstiefe der Sonne, oder welches einerley iſt, die Summe und Differenz der Aequatorshöhe und der Declination. Sodann, indem man in dem Circul AFBL den verticalen und horizontalen Diameter FL, AB gezogen, trägt man die Mittagshöhe aus B in D, die Mitternachtstiefe aus B in E, oder aus A in M, und zieht DG, EH mit dem Horizonte AB parallel. Auf GH beſchreibt man den Circul GJHP und theilt denſelben in 24 Stunden. Wird ſodann durch jede Stunde J die Linie PJK *horizontal*, oder *mit* A *B* parallel gezogen, ſo findet ſich BK, die dazu gehörende Höhe der Sonne, NGQ iſt die Tageslänge, und NHQ die Nachtlänge, DE die doppelte Höhe des Aequators, RJ der Sinus der Sonnenhöhe in beſtändiger Verhältniß des Products der beyden Chorden NJ, QJ. Denn da NQ die Chorde des Nachtbogens, NJQ der Hälfte deſſelben gleich, folglich NQ zu ſin. NJQ in beſtändiger Verhältniß iſt, ſo iſt auch NJ ∽ ſin NQJ

QJ ∽ ſin QNJ

Fig. XIII.

Nun

Nun iſt

$$JR = NJ . \sin QNJ$$

demnach

$$JR \backsim NJ . QJ.$$

Es iſt aber, wenn man die wirkliche Gleichung ſucht

$$\sin NJQ = NQ : GH$$

demnach $NQ = GH . \sin NJQ$

$$NJ = GH . \sin NQJ$$

$$JR = GH . \sin NQJ . \sin QNJ$$

Nun iſt, wenn man $AC = 1$ ſetzt

$$CG = \cos. (c - e)$$

$$CH = -\cos(c + e)$$

demnach

$$GH = \cos(c - e) - \cos(c + e) = 2 \sin c . \sin e$$

und daher der Sinus der Sonenhöhe

$$JR = 2 \sin c . \sin e . \sin NQJ . \sin QNJ$$

Es iſt aber, wenn J eine Nachmittagsſtunde iſt, der Bogen NPJ die Zeit vom Aufgange der Sonne, JQ die Zeit bis zum Untergang der Sonne. Demnach läßt ſich, wenn die Tageslänge bekannt iſt, die Höhe der Sonne durch die bloſſe Addition von vier Logarithmen berechnen. Da übrigens DE die doppelte Aequatorshöhe iſt, ſo iſt die Chorde DE für jede Declination der Sonne von beſtändiger Gröſſe, und eben die, ſo in der 9ten, 10ten und 11ten Figur CN iſt. Demnach läßt ſich auch aus dieſer 12ten Figur ein ähnliches Inſtrument herleiten.

Digitized by Google

VI. Anmerkungen über die Horizontal- und Verticaluhren.

§. 42.

Die Kunſt Sonnenuhren zu machen wird häufig auch von ſolchen Leuten ausgeübt, die von allen dazu gehörigen Gründen ſchlechthin nichts verſtehen. Unter andern Anläſſen, die ich gehabt habe, ohne Rückſicht auf ſo viele ſelbſt auf dem Lande anzutreffende Sonnenuhren dieſe Anmerckung zu machen, fande ich einen ſolchen Künſtler, der ungefähr wußte, daß bey dem Horizonthal- und mittäglichen Verticaluhren die Stunden nicht gleich nahe bey einander ſind. Dieſes brachte ihn, oder einen ſeiner Vorgänger, auf den Einfall aus A und B die Bögen B D, A D zu beſchreiben, jeden in ſechs gleiche Theile zu theilen, und aus der Mitte C die Stundenlinien in die Theilungspuncte zu ziehen, ſodann den Zeiger unter einen halben Winkel, das will ſagen, unter 45 Graden auf C D aufzurichten. So wird unſtreitig die Uhr leicht und geſchwinde gezeichnet, nur muß man für die Genauigkeit derſelben nicht gut ſtehen, weil dieſe eine beträchtliche Verbeſſerung der Methode erfordert, wenn man ſtatt der Tangenten oder Aequinoctiallinie, ſolche Circulbögen, dergleichen A D, B D ſind, dazu gebrauchen will.

Fig. XIV.

§. 43.

§. 43.

Man ziehe nemlich den Circul HDM, und darin die beyden Diameter HM, VD perpendiculår. Den Circul HDM theile man in 24 gleiche Theile als Stunden. Sodann mache man VDC der Hôhe des Aequators, und VDP der Hålfte deſſelben gleich, und aus dem Centro C beſchreibe man durch D den Circul ADE. Aus P ziehe man in jede Stunden des Circuls HDM blinde Linien, und wo dieſe den Circul ADE durchſchneiden, da ziehe man aus V Linien, welches die Stundenlinien der Horizonthaluhr für die Polhôhe DCV ſeyn werden. Fig. XV.

§. 44.

Die Figur iſt eine Projection der Sphåre auf den Horizont, wenn das Aug im Zenith iſt. HDM iſt der Horizont, ADE der Aequator, P der Pol, V das Zenith, VF ein Verticalcircul, DG der Stundenbogen auf dem Aequator, oder die Zeit vom Mittage an in Grade verwandelt, GDF die Hôhe des Aequators, demnach, weil der Triangel DFG in F rechtwinklicht iſt,

$$\cos GDF = \cot DG . \tang DF$$

daher iſt DF der Stundenbogen, oder DVF der Stundenwinkel für die Horizontalſonnenuhr. Die blinden Linien PG ſind ſchlechthin nur, um den Aequator ADE nach dem Regeln der Projection in Grade einzutheilen.

§. 45.

Nimmt man zu dem Winkeln V D C, V D P ſtatt der ganzen und halben Aequatorshöhe, die ganzen und halbe Polhöhe, ſo erhält man ſtatt der Horizontaluhr eine mittagliche Verticaluhr. Dieſe Verzeichnungsart iſt dadurch geſchmeidiger und in allem eben ſo einfach als die gewöhnliche, weil man hier anſtatt einer geraden Aequinoctiallinie, welche für die Morgen- und Abendſtunden, gar zu ſehr verlängert werden muß, den Aequinoctialcircul A D E gebraucht.

§. 46.

Man kann ſich ferner eben dieſer Projectionsart bedienen, um eine Vorbereitung zu finden, nach welcher ſodann jede Horizontal- und Verticaluhren für jede Polhöhen, durch bloſſe Zeichnung eines halben Circuls gezeichnet werden könnten. Die Vorbereitung ſelbſt iſt folgende:

§. 47.

Fig. XVI. Aus dem Durchſchnitte der Perpendicularen A C B, D C E zieht man den Circul A B D E, und beſchreibt ſodann durch die Punct D, E Circulbögen, welche die Linie D E unter Winkeln von 15, 30, 45, 60, 75 Graden durchſchneiden. Es iſt klar, daß die Halbmeſſer dieſer Bögen Secanten dieſer Grade ſeyn, ihre Mittelpuncte auf A B liegen, und von C um die Tangenten dieſer Grade entfernt ſeyn werden. Dieſes iſt nun die Vorbereitung.

§. 48.

Digitized by Google

§. 48.

Sollte nun eine Horizontaluhr verzeichnet werden, ſo macht man A P der Polhöhe gleich, zieht P Q mit A B parallel, und beſchreibt aus der Mitte E den halben Circul P M K, ſo iſt K M die Mittagslinie, der Zeiger wird in K aufgerichtet, und die Durchſchnittspuncten 1, 2, 3 ꝛc. 11, 10, 9 ꝛc. geben die Stundenbögen der Horizontaluhr, wenn man aus denſelben gerade Linien in k zieht. Macht man hingegen M P der Höhe des Aequators gleich, ſo erhält man auf eben die Art eine mittägliche Verticaluhr.

§. 49.

Es ſey K das Zenith, P H Q M der Horizont, K Q der Halbmeſſer, K D werde der Tangente und K E der Cotangente der halben Aequatorshöhe gleich gemacht, ſo ſind D, E die beyden Pole, D N E ein Mittagskreis, M D N = M E N der Stundenwinkel, und M E die Polhöhe. Da nun in dem rechtwinklichten Triangel M E N Fig. XVII.

$$\sin EM = \cot MEN . \tang MN$$

ſo iſt M N der Stundenbogen, oder M K N der Stundenwinkel für die Horinzontaluhr. Man ſetze nun C A = 1, ſo iſt C K = dem Sinus der Polhöhe, K Q = K M deren Coſinus. Da nun vermög der Projectionsart, jede Mittagscircul E N D die Mittagslinie E D unter eben den Winkeln ſchneiden, unter welche ſie auf der

Digitized by Google

Sphäre den Mittagskreis ſchneiden, ſo ergiebt ſich hieraus die Conſtruction der Uhr, wie ſie in der 16ten Figur vorgeſtellet worden, wo die Buchſtaben A, B, C, D, E K, M, P, Q eben die Bedeutung haben, wie in der 17ten Figur.

§. 50.

Man findet ſehr häufig kleine Horizontaluhren, die man bey ſich tragen kann, und wo die Mittagslinie entweder durch den darauf gezeichneten Thierkreis, oder vermittelſt einer Magnetnadel gefunden wird. Solche Uhren ſind nun allerdings für eine gewiſſe Polhöhe, und dieſes mag der Grund ſeyn, warum Reiſende ſich lieber Aequinoctialuhren anſchaffen, welche auf jede Polhöhe können gerichtet werden. Man kann aber dieſen Vortheil auf eine eben ſo leichte Art bey jeder Horizontaluhr erhalten. Man ſetze z. E. die Uhr ſey für den 55ten Grad der Polhöhe gezeichnet, ſo wird ſie unter dieſer Polhöhe in der That eine horizontale Lage haben. Will man ſie aber unter einer andern Polhöhe z. E. unter dem 50ſten Grade gebrauchen, ſo muß man ſie gegen Mittag um 5 Grade erhöhen, damit der Zeiger einen Winkel von 50 Gr. mit dem Horizonte mache. Zu dieſem Ende kann das Plättgen
Fig. XVIII oder Täfelgen A C, auf welchem die Uhr verzeichnet iſt, vermittelſt eines Gewindes in A an ein anderes A B angeſchraubt werden. Um demſelben ſodann die behörige Erhöhung

zu

zu geben, wird in B ein Circulbogen, deſſen Centrum in A iſt, ſo angemacht, daß man ihn ſowohl legen als aufrichten kann. Oder man läßt durch C eine Stellſchraube auf B gehen, durch deren Umdrehen man A C nach Erforderniß erhöhen kann. Es iſt dabey möglich die Schraubengänge mit der Diſtanz A B ſo zu proportioniren, daß bey jedem Umgange der Schraube A C um einen Grad erhöht wird. Dieſes geſchieht, wenn A C ſo lang als $57\frac{3}{10}$ Schraubengänge genommen wird. Das leichteſte und aus andern Abſichten zugleich das vortheilhafteſte Mittel aber iſt das Unterſchieben eines rechtwinklichten Priſma D. Denn A C wird um deſto mehr erhöht, je näher D gegen A geſchoben wird. Wie weit aber das Priſma D an jedem Orte müſſe geſchoben werden, läßt ſich am bequemſten finden, wenn man auf dem untern Plättgen A B eine Landcharte verzeichnet. Denn ſo wird die Uhr auch von denen gebraucht werden können, die von der Polhöhe gar keinen Begrif haben.

§. 51.

Da die Höhe des Priſma D als beſtändig angeſehen wird, ſo iſt A D in Verhältniß der Cotangente des Winkels C A B. Da dieſe Cotangente unendlich wird, wenn C A D = 0 iſt, ſo thut man am beſten, wenn man dem Winkel C A B 5 Grade giebt, wenn D in B zu liegen kömmt, das will ſagen, die Son-

nenuhr wird für eine Polhöhe verzeichnet, die 5 Grade gröſſer iſt, als die gröſte, ſo man auf der Lancharte anbringen will. Man ſetze z. E. es ſolle der 55te Grad der Polhöhe in B fallen, welches ungefähr die nördliche Grenzlinie von Deutſchland iſt, ſo ſieht man die Länge A B als die Cotangente von 5 Graden an, und trägt nach gleichem Maaßſtabe die Cotangenten von 6, 7, 8, 9, 10, 11 ꝛc. Graden aus A gegen B, und nach eben dem Maaßſtabe erhält das Priſma D die Höhe von dem Halbmeſſer. Die Sonnenuhr auf dem obern Plättgen A B wird für den 60ſten Grad der Polhöhe verzeichnet. Die Grade der Länge bleiben hiebey willkührlich. Man kann ſie daher ſowohl nach der Breite der Sonnenuhr, als nach dem Diſtricte der Erdfläche richten, welches man auf die Landcharte bringen will. Man kann
Fig. XIX. aus der 19ten Figur ſehen, wie die Sache ausfällt. A D iſt der Halbmeſſer und zugleich die Höhe des Priſma, A B die Tangente von 85 Grad, und die übrigen Puncte der Scale A B ſind die Tangenten von 84, 83, 82, 81 ꝛc. Graden. Die Uhr A C iſt auf die Polhöhe 60 Grad gezeichnet, und daher iſt bey B der 55ſte Grad geſetzt, weil, wenn das Priſma in B untergeſtellt wird, die Fläche der Uhr um 5 Gr. erhöht, demnach der Zeiger um 5 Grad vertieft, daß will ſagen, auf die Polhöhe von 55 Grad gerichtet wird.

§. 52,

Digitized by Google

§. 52.

Es wird dem Leſer von ſelbſt beyfallen, daß die beyden Inſtrumente, ſo die 11te und 12te Figur vorſtellt, ebenfalls von der Art ſind, daß eine Landcharte darauf verzeichnet werden kann, und zwar deſto beſſer, weil die in GC und HN verzeichnete Grade der Breite oder Polhöhe weniger ungleich ſind. Fig. XI. et XII.

§. 53.

Wenn die Abweichung der Magnetnadel an einerley Ort beſtändig bliebe, ſo lieſſen ſich auf der Landcharte die ſogenannten Halleyſchen Linien zeichnen, um den Gebrauch der Sonnenuhr auch auf dieſe Art allgemein zu machen. Man kann aber auch auf der Uhr ſelbſt den Thierkreis zeichnen, und zwar für die Polhöhe von 60 Gr. für welche die Uhr horizontal iſt. Unter jeder andern Polhöhe giebt man durch Unterſchiebung des Priſma der Uhr die behörige Erhöhung, und dreht ſie ſodann herum, bis der Schatten auf den Ort der Sonne trift, um dadurch zugleich die Stunde und die Lage der Mittagslinie zu finden. Fig. XIX.

Digitized by Google

VII. Beſchreibung eines halben Circuls, um aus der Höhe der Sonne die Zeit zu finden.

§. 54.

Fig. XX. Wir haben dieſes Inſtrument oben (§. 19.) nur kurz angezeigt, und werden nun die Art daſſelbe zu verzeichnen noch angeben. Man beſchreibe auf einem Diameter C B, von beliebiger Länge, den halben Circul C N B, und mache den Winkel B C K der Polhöhe gleich. Aus dem Mittelpunct H ziehe man H F mit C K parallel, und aus C die Linie C F auf H F ſenkrecht. Man beſchreibe ſodann mit dem Halbmeſſer F H aus F den Circulbogen H Q, und theile denſelben in Stunden. Aus jeder Stunde ziehe man Perpendicularen auf HF, ſo wird man eben ſo viele Centra haben, aus welchen durch C Circulbögen CD gezogen werden müſſen, welche, wenn LCK = MCK der Obliquität der Ecliptic gleich gemacht wird, innert den Linien M C, LC ſodann gezogen werden. Dieſen Bögen werden die Stunden beygeſchrieben, und aus K gegen L und M die doppelte Grade der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreiſes aufgetragen. Endlich wird in C ein Faden C P mit einer Perl N und Gewichte P angehängt, und die Diopter auf CB mit dieſer Linie parallel angemacht.

§. 55.

§. 55.

Soll nun damit die Stunde gefunden werden, ſo richtet man die Dioptern C B gegen die Sonne, und läßt den Faden frey hangen. Sodann ſchiebt man die Perl in N auf den 12ten Stundenkreis, und legt den Faden auf den Ort der Sonne, z. E. in CR, ſo fällt die Perl in S auf 4 Uhr 25 Min. Nachmittag, oder 7 Uhr 35 Min. Vormittag.

§. 56.

Dieſes Inſtrument hat zugleich den Vortheil, daß es nach geometriſcher Schärfe genau iſt, und auf eine ſehr einfache und leichte Art verzeichnet werden kann. Bey den Quadranten, die man in den meiſten Anweiſungen zur Gnomonic angiebt, fehlt es an beyden. Denn werden ſie durch lauter Circulbögen conſtruirt, ſo geht der geometriſchen Schärfe ab. Conſtruirt man ſie aber vermittelſt der für jede Stunden und Zeichen voraus berechneten Sonnenhöhen durch krumme Linien, ſo muß man dieſe von freyer Hand ziehen, und die Arbeit wird weitläuftig. In dem Gebrauche iſt gegenwärtiger halbe Circul von den Quadranten auch nur in ſofern verſchieden, daß man bey den Quadranten die Perl anfangs auf den Ort der Sonne ſchiebt, und ſodann die Höhe der Sonne ſucht, hier aber bey der Höhe anfängt, und dann die Perl aus N in S bringt.

VIII. Beſchreibung eines gleichſchenklichten Triangels, um aus der Sonnenhöhe die Stunden zu finden.

§. 57.

Fig. XXI. Man nimmt auf der verticalen Linie A E als einen Halbmeſſer an, und trägt die Sinus verſus der Stunden aus A aufwerts. Sodann nimmt man auf gleicher Scale die Tangente der Polhöhe als einen Halbmeſſer an, und trägt die Tangenten der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreiſes aus E aufwerts und unterwerts. Endlich nimmt man auf eben der Scale die halbe Secante der Polhöhe als einen Halbmeſſer an, und trägt auf den beyden Schenkeln C D, C F die Secanten der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreiſes aus C gegen D und F. Dieſe beyden Schenkel haben in C ein Gewinde wie die beyden Schenkel eines Proportionalcirculs. In D wird gleichfalls ein bewegliches Gewinde angebracht, ſo, daß ſich nicht nur C D an A D herumdrehen laſſe, ſondern daß der Mittelpunct des Gewindes D auf den ſowohl auf C D als auf A D gezeichneten jedesmaligen Ort der Sonne geſchoben werden könne. In F aber wird an dem Schenkel C F ein Stift angemacht, ſo, daß derſelbe ebenfalls auf den auf dieſem Schenkel gezeichneten jedesmaligen

Ort

Ort der Sonne geſchoben und befeſtigt werden könne. Die Dioptern können auf C D oder auf F C kommen, weil jeder dieſer Schenkel einerley Winkel mit dem Horizonte macht. Iſt nun das Gewind in D und der Stift in F auf den Ort der Sonne geſtellt, ſo rückt man den Stift F auf der Stundenlinie A B herauf oder herunter bis die Dioptern F C oder C D gegen die Sonne gerichtet ſind, alsdenn zeigt der Stift die Stunde und Minute, die zu finden war.

§. 58.

Es ſey, um dieſes zu beweiſen,

p die Polhöhe
d die Declination
h die Höhe der Sonne
ω die Stunde oder der Stundenbogen, von Mittag an gerechnet;

ſo iſt vermög der Conſtruction

$$AE = 1$$
$$ED = \text{tang } d \,.\, \text{tang } p$$
$$CD = CF = \tfrac{1}{2} \text{ſec } d \,.\, \text{ſec } p$$
$$EF = \text{coſ } \omega$$
$$DCF = 2h$$
$$DF = 2DC \,.\, \text{ſin } h = \text{ſec } d \,.\, \text{ſec } p \,.\, \text{ſin } h$$

Nun iſt

$$DF = DE + EF$$

folglich

$$\mathrm{sec}\, d \,.\, \mathrm{sec}\, p \,.\, \mathrm{sin}\, h = \mathrm{tang}\, d \,.\, \mathrm{tang}\, p + \mathrm{cos}\, \omega$$

oder, wenn man durch $\mathrm{sec}\, d \,.\, \mathrm{sec}\, p$ dividirt

$$\mathrm{sin}\, h = \mathrm{sin}\, p \,.\, \mathrm{sin}\, d + \mathrm{cos}\, p \,.\, \mathrm{cos}\, d \,.\, \mathrm{cos}\, \omega$$

Da dieſes die bekannte Gleichung zwiſchen der Polhöhe, Declination, Sonnenhöhe und Stundenbogen iſt, ſo iſt die Conſtruction diejenige, welche dieſe Gleichung erfordert.

XI.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google